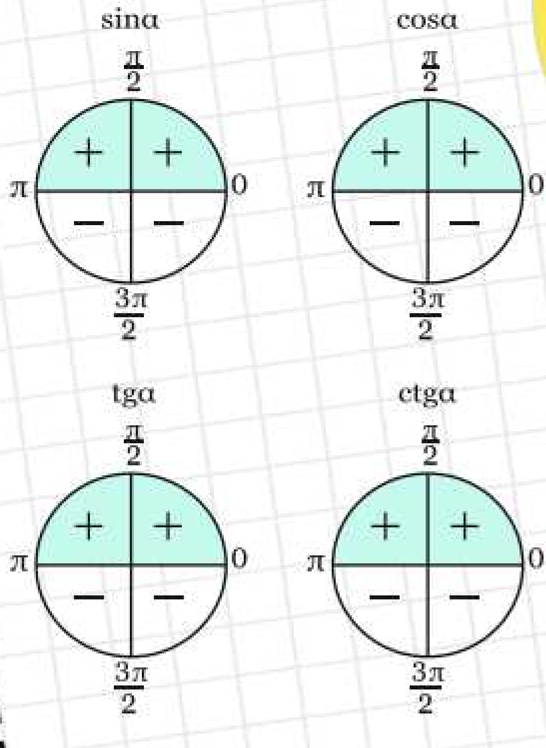
АЛГЕБРА

Часть 2

10



Издательство
МЕКТЕП

А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер,
В. Е. Корчевский, З. А. Жумагулова

АЛГЕБРА

Часть 2

Учебник для учащихся 10 класса
с нарушением зрения (слабовидящих)
специальных школ (классов)

Рекомендовано Министерством просвещения
Республики Казахстан

Алматы
2022

УДК
ББК
А

Печатается по изданию: Абылкасымова А. Е. и др.
А Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательных школ. / А. Е. Абылкасымова, $\boxed{\text{Т. П. Кучер}}$, В. Е. Корчевский, З. А. Жумагулова. – Алматы: Мектеп, 2019. – 152 с.

Адаптировано на укрупненный шрифт ТОО «Центр САТР» по заказу Министерства просвещения Республики Казахстан. В 2-х ч. / Часть 2. – Алматы, 2022. – 284 с.

ISBN
Часть 2. – 284 с.
ISBN

УДК
ББК

ISBN (Часть 2)
ISBN (Общий)

Условные обозначения:

– определения, свойства, правила

? – проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

? – проанализируй и ответь на вопрос

? – вопросы для закрепления

– задания для самостоятельного изучения

– конец доказательства теоремы или свойства

Д – дополнительные материалы

A – обязательные упражнения для всех учащихся

B – упражнения средней сложности

C – упражнения повышенной сложности

П – упражнения для повторения

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ **I**

ТРИГОНОМЕТРИЯ **II**

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ **III**

Глава II

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 11. Тригонометрические тождества

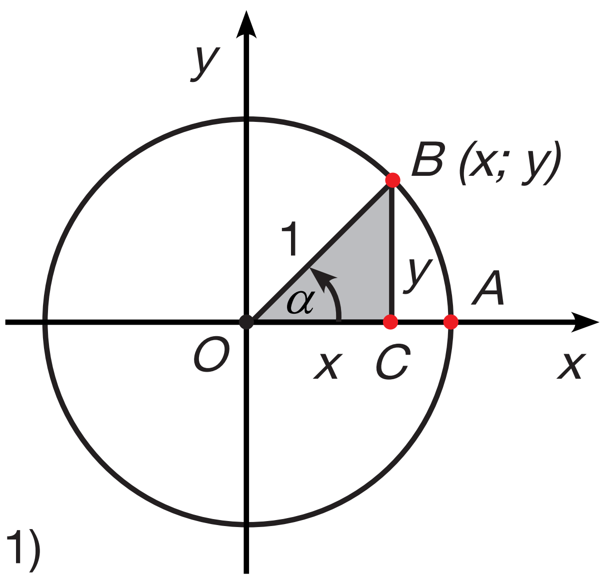
Вы научитесь выводить и применять основные тригонометрические тождества.

Поскольку значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ не зависят от величины радиуса, а зависят лишь от величины угла, то при рассмотрении тригонометрических функций будем рассматривать окружность, длина радиуса которой равна 1 (одному) радиану. Тогда значение, например, функции синуса будет определено только ординатой $\boldsymbol{y}$ — конца точки B подвижного радиуса OB, а значение косинуса — абсциссой $\boldsymbol{x}$ — точки $\boldsymbol{B}$ (рис. 44.1).

Рассмотрим прямоугольный треугольник OBC (рис. 44.2). По теореме Пифагора получим $OB^2 = OC^2 + BC^2$. Поскольку $OB = 1$, $OC = x = \cos\alpha$, $BC = y = \sin\alpha$, то $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, или

$$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

Данное равенство верно при любых значениях α, т. е. является тождеством.



1)

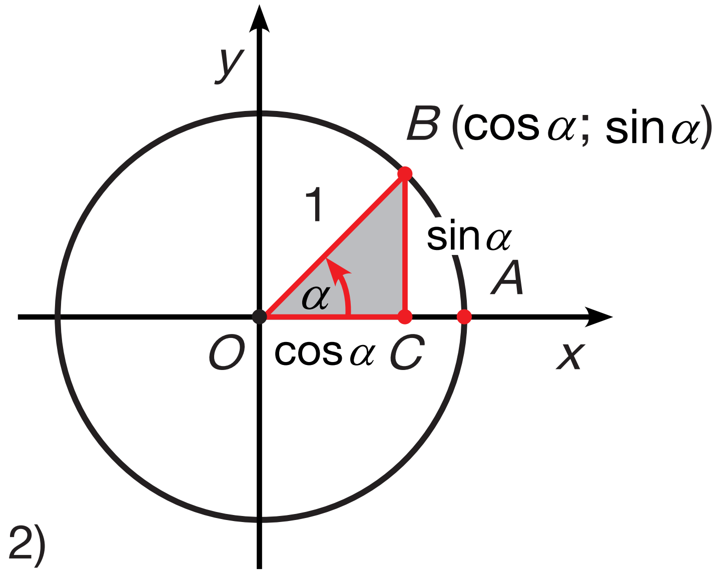


Рис. 44

По определению $tg\alpha = \frac{x}{y}$, $ctg\alpha = \frac{x}{y}$. Поскольку $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$ то,

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Равенства (1) — (3) называются **основными тригонометрическими тождествами**.

Запомните

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тригонометрическим тождеством называется равенство, в которое входят тригонометрические функции и верно при любых допустимых значениях аргумента тригонометрических функций, но неверно, если каждую из функций заменить произвольной величиной.

Например, 1) тождество $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$ не тригонометрическое, так как оно останется верным, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ заменить произвольными величинами a и b; тогда это будет алгебраическое тождество $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) тождество же $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$ тригонометрическое, так

как при замене $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ на произвольные a и b оно обращается в нетождественное равенство $(a+b)^2 = 1 + 2ab$.

Почленно умножив тождества (2) и (3), получим $tg\alpha \cdot ctg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, т. е. тригонометрическое тождество:

$$\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1} \qquad (4)$$

Если разделим обе части тождества (1) на $\sin^2\alpha$ при условии, что $\sin\alpha \neq 0$, то получим равенство $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, или тригонометрическое тождество

$$\mathbf{1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}} \qquad (5)$$

Докажите тождество:

$$\mathbf{1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}, \qquad (6)$$

$$\mathbf{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}, \qquad (7)$$

$$\mathbf{ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}. \qquad (8)$$

В таблице 8 записаны формулы, которые выражают соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

Таблица 4

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{ctg\alpha}$
$\sin^2\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{tg\alpha}$
$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$
$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Пример: 1. Найдем значения $\sin\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ и $0<\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Из формулы (1) получим $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ или $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Поскольку α есть угол первой четверти, поэтому значения всех указанных функций будут положительны.

Тогда

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

(По формуле (2) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, так как $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$, $tg\alpha = \dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \dfrac{5}{12}$. По формуле (8) $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$.

Ответ: $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $tg\alpha = \dfrac{5}{12}$, $ctg\alpha = 2{,}4$.

Пример: 2. Найдем значения $\sin\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha = \pi$.

Решение. По условию α является углом II четверти, поэтому $\cos\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ отрицательные. Следовательно,

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3};\ ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\sqrt{3}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$ctg\alpha = -\sqrt{3}$.

Пример: 3. Известно, что $ctg\alpha = -3$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Вычислим $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$.

Решение.

Из формулы (5) $1+ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ получим $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+ctg^2\alpha}$.

Поскольку значения $\sin\alpha$ и $tg\alpha$ в IV четверти отрицательные, а $\cos\alpha$ — положительные, то $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+9}} = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Из формулы (3) $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ получим

$$\cos\alpha = ctg\alpha \cdot \sin\alpha = -3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

По формуле (7) $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $tg\alpha = -\frac{1}{3}$.

?

1. Произведение каких тригонометрических функций равно 1?

2. Каким тождественным равенством связаны функции синус и косинус?

3. Можно ли, зная значения синуса некоторого угла и его принадлежность некоторой четверти, вычислить значение котангенса этого угла?

А

11.1. Вычислите:

1) $\sin\beta$, если $\cos\beta = 0{,}5$ и $0° < \beta < 90°$;

2) $\cos\beta$, если $\sin\beta = 0{,}5$ и $0° < \beta < 90°$;

3) $\sin\beta$, если $\cos\beta = -0{,}5$ и $90° < \beta < 180°$;

4) $\cos\beta$, если $\sin\beta = -0{,}5$ и $180° < \beta < 270°$.

11.2. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}$;

3) $\sin^2\alpha-(1+tg^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$;

4) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot(1+ctg^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha$.

11.3. Найдите значение выражения:

1) $1-\sin\alpha\cos\alpha\, ctg\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\dfrac{tg\alpha+ctg\alpha}{tg\alpha-ctg\alpha}$, если $tg\alpha=\dfrac{2}{3}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, если $tg\alpha=\dfrac{2}{5}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, если $tg\alpha=\dfrac{3}{2}$;

5) $\dfrac{1-tg^2\alpha}{1-ctg^2\alpha}$, если $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$;

6) $\dfrac{1-tg^2\alpha}{1-ctg^2\alpha}$, если $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

11.4. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{tg\alpha}-1;$

2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{ctg\alpha}-1;$

3) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha};$

4) $\dfrac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha};$

5) $\dfrac{1-ctg\alpha}{1-tg\alpha};$

6) $\dfrac{tg\alpha-1}{ctg\alpha-1};$

7) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}-\dfrac{1}{1-\sin\alpha};$

8) $\dfrac{ctg\alpha+1}{tg\alpha+1};$

9) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+ctg\alpha;$

10) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-tg\alpha;$

11) $\dfrac{\sin\beta}{1-\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta};$

12) $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}.$

11.5. Докажите тождество:

1) $\cos^2\alpha+tg^2\alpha+\sin^2\alpha=tg^2\alpha+1;$

2) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1=2\sin^2\alpha;$

3) $(\sin\alpha+1)(\sin\alpha-1)=-\cos^2\alpha;$

4) $tg\alpha+ctg\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}.$

11.6. Дано: $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $180° < \alpha < 270°$.

Найдите $\cos\alpha$ и $ctg\alpha$.

11.7. Дано: $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$, $90° < \alpha < 180°$.

Найдите $\sin\alpha$ и $tg\alpha$.

B

11.8. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{1}{1 + ctg^2\alpha} + \cos^2\alpha\right) \cdot tg^2\alpha$;

2) $\left(\frac{tg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha} + \cos^2\alpha\right) \cdot \cos^2\alpha$.

11.9. Докажите тождество:

1) $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^4 x - \cos^4 x$;

2) $(1+\cos\alpha)(1+tg\alpha) = 1+\sin\alpha+\cos\alpha+tg\alpha$;

3) $(tgx+ctgx)^2 - (tgx-ctgx)^2 = 4$;

4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha-\cos\alpha)^2 = 2$;

5) $\sin^3 x(1+ctgx) + \cos^3 x(1+tgx) =$

$= \sin x + \cos x$;

6) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - 1}{ctg\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2tg^2\alpha$.

11.10. Докажите, что не зависит от переменной значение выражения:

1) $\dfrac{2\sin x+\cos x-1}{(\sin x-\cos x)^2}$; 3) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^2\alpha}$;

2) $\dfrac{1}{1+ctg^2x} + \dfrac{1}{1+tg^2x}$; 4) $\dfrac{1}{1-tg^2x} + \dfrac{1}{1-ctg^2x}$.

11.11. Найдите значение выражения:

1) $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$, если $tg\alpha = \frac{1}{3}$;

2) $3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

11.12. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} + \sqrt{1+ctg^2\alpha}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} + \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

11.13. Докажите тождество:

1) $\frac{\cos^3\beta - \sin^3\beta}{1+\cos\beta\sin\beta} = \cos\beta - \sin\beta$;

2) $\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta} - \frac{\cos\beta}{1-\sin\beta} = -2tg\beta$;

3) $(1+tg\beta)^2+(1-tg\beta)^2=\dfrac{2}{\cos^2\beta}$;

4) $\dfrac{1-4\cos^2\beta\cdot\sin^2\beta}{(\cos\beta+\sin\beta)^2}+2\cos\beta\cdot\sin\beta=1$.

11.14. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $1-\sin\gamma\cos\gamma tg\gamma$, если $\sin\gamma=0{,}6$;

2) $\cos^4\beta+\cos^2\beta\sin^2\beta$, если $tg\beta=3$;

3) $\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$, если $\sin\beta=0{,}3$;

4) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$, если $\cos\beta=0{,}4$.

11.15. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}+ctg\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+tg\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$;

3) $\sin(-\alpha)ctg\alpha+\cos(-\alpha)=0$;

4) $\cos\alpha\, tg(-\alpha)-\sin(-\alpha)=0$.

11.16. Известно, что $tg\alpha=3$. Найдите:

1) $\dfrac{4\cos\alpha-2\sin\alpha}{3\sin\alpha+\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{5\cos\alpha+3\sin\alpha}{3\sin\alpha-2\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{4\cos\alpha-3\sin\alpha}{3\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}$.

11.17. Известно, что $ctg\alpha=3$. Найдите:

1) $\dfrac{4\cos\alpha-\sin\alpha}{2\sin\alpha+\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{4\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{5\cos\alpha - 9\sin\alpha}{\sin^3\alpha + 5\cos^3\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha}$.

C

11.18. Докажите тождество:

1) $(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) : (\sin\alpha + \cos\alpha) +$
$+ \sin\alpha\cos\alpha = 1$;

2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha + \cos^6\alpha =$
$= \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{1 + 2\sin\beta\cos\beta}{(\cos\beta + \sin\beta)^2} = 1$;

4) $\dfrac{\sin^4\beta - \cos^4\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\beta} = -1$.

11.19. Найдите значения α, при которых достигается наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha - 3$;

2) $3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$;

3) $4\sin^2\alpha + 3 ctg\alpha\, tg\alpha$;

4) $5\cos^2\alpha - ctg\alpha\; tg\alpha$.

11.20. Упростите выражение:

1) $(1 + tg\beta)\cdot\cos^3\beta + (1 + ctg\beta)\cdot\sin^3\beta + 1$;

2) $2 - \left(\dfrac{ctg\beta + \sin\beta}{\sin\beta\, tg\beta + 1}\right)^2 + ctg^2\beta$.

11.21. Существует ли угол α, для которого верно равенство:

1) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$;

2) $\sin\alpha = \dfrac{5}{8}$ и $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$;

3) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$;

4) $tg\alpha = 1{,}4$ и $\cos\alpha = \frac{5}{7}$;

5) $tg\alpha = -2{,}4$ и $ctg\alpha = \frac{5}{12}$;

6) $tg\alpha = \sqrt{3}$ и $ctg\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$?

11.22. Найдите значение выражения $ctg^2\beta + \frac{1}{\cos\beta\sin\beta} + tg^2\beta$, если $ctg\beta + tg\beta = 4$.

11.23. Упростите выражение:

1) $1 - \sin^2 3\beta - \cos^2 3\beta$;

2) $\frac{(\sin^2 4\alpha - \cos^2 4\alpha)^2}{1 - 4\sin^2 4\alpha\cos^2 4\alpha}$;

3) $2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$;

4) $1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha$.

11.24. Известно, что $\sin\beta+\cos\beta=0{,}6$. Найдите значение выражения:

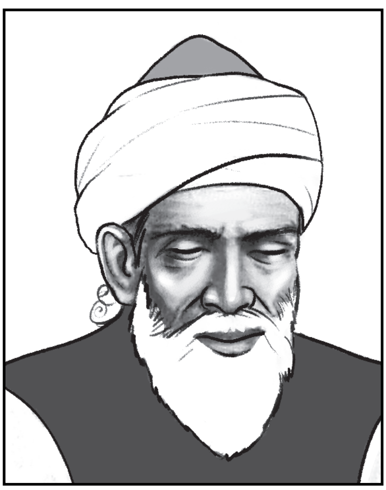
1) $\sin\beta-\cos\beta$;

2) $\sin^3\beta+\cos^3\beta$;

3) $\sin^4\beta+\cos^4\beta$;

4) $\sin^6\beta+\cos^6\beta$.

Подготовьте сообщение об ученом-математике



Абу-ль-Вефа (940–998)

В X в. багдадский ученый Абу-ль-Вефа присоединил к понятиям синусов и косинусов понятия тангенсов, котангенсов, секансов и косекансов и установил также основные соотношения между ними.

П

11.25. 1) Найдите значение суммы первых 105 членов арифметической прогрессии, если $a_{53} = 30$.

2) Найдите значение суммы первых 207 членов арифметической прогрессии, если $a_{103} = 15$.

11.26. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y - x^2}{x - 2} = 0;$

2) $\dfrac{y - x^2 + 2}{x - 2} = 0;$

3) $\dfrac{y - 0,5x^2}{|x| - 2} = 0;$

4) $\dfrac{y + 0,5x^2}{|x| - 3} = 0.$

11.27. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{a - x} - \dfrac{3x^2}{a^3 - x^3} - \dfrac{x}{a^2 + ax + x^2}\right) \cdot$

$$\cdot\left(\frac{a^2}{a+x}+x\right);$$

2) $\dfrac{2x-3}{3x}-\dfrac{1}{x+3}\cdot\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)+\dfrac{2}{3}.$

11.28. Решите неравенство:

1) $\dfrac{(x^2-7x-8)(x-10)^3}{(x+2)^2(3-x)}\le 0;$

2) $\dfrac{(x^2-6x+8)(x^2-9)}{5(x^3-8)}\ge 0;$

3) $\dfrac{(3x^2+5x)(4x-x^2)}{(x+5)^2}\le 0;$

4) $\dfrac{(x+3)^4(x-5)^3}{6(x^2+x-2)}\ge 0.$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

11.29. Расположите в порядке возрастания значения выражений:

1) $\sin 30°$, $\cos 60°$, $\sin 150°$, $\cos 120°$;

2) $tg 30°$, $ctg 60°$, $tg 150°$, $ctg 120°$.

11.30. Найдите значение выражения:

1) $\sin 90° + 2\cos 150° - \sin 120° + ctg 120°$;

2) $2\sin 120° + \cos 90° - \cos 120° + tg 150°$.

§ 12. Формулы приведения

Вы научитесь выводить и применять формулы приведения.

При решении многих задач, связанных с тригонометрическими функциями, большое значение имеет приведение тригонометрических функций любого угла к тригонометрическим функциям острого угла. Иными словами, если даны тригонометрические функции угла вида $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ (где $\boldsymbol{k}$ — любое целое число, α — острый угол), то целесообразно и намного удобнее их привести к тригонометрическим функциям угла α. Для этого применяются специальные формулы, называемые **формулами приведения**.

Сначала рассмотрим формулы приведения для синуса и косинуса, затем через них выведем формулы приведения для тангенса и котангенса.

Рассмотрим синусы и косинусы углов II четверти. Любой угол II четверти можно представить в виде $\frac{\pi}{2}+\alpha$ (где α — острый угол). Рассмотрим окружность. Радиус окружности $R = OA$ повернем вокруг точки O сначала на угол α, затем еще раз — на угол $\frac{\pi}{2}+\alpha$ (рис. 45). При этих поворотах радиус OA, соответственно, переходит в радиусы OB и OB_1. Из точек B и B_1 проводим перпендикуляры на координатные оси.

В результате получим два прямоугольника $OCBD$ и $OC_1B_1D_1$. Можно легко убедиться, что прямоугольник $OC_1B_1D_1$ получается поворотом прямоугольника $OCBD$ вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Действительно, так как $\angle BOB_1 = \frac{\pi}{2}$, при повороте точка B

переходит в точку B_1. Точно так же точка C переходит в точку C_1, точка D переходит в точку D_1.

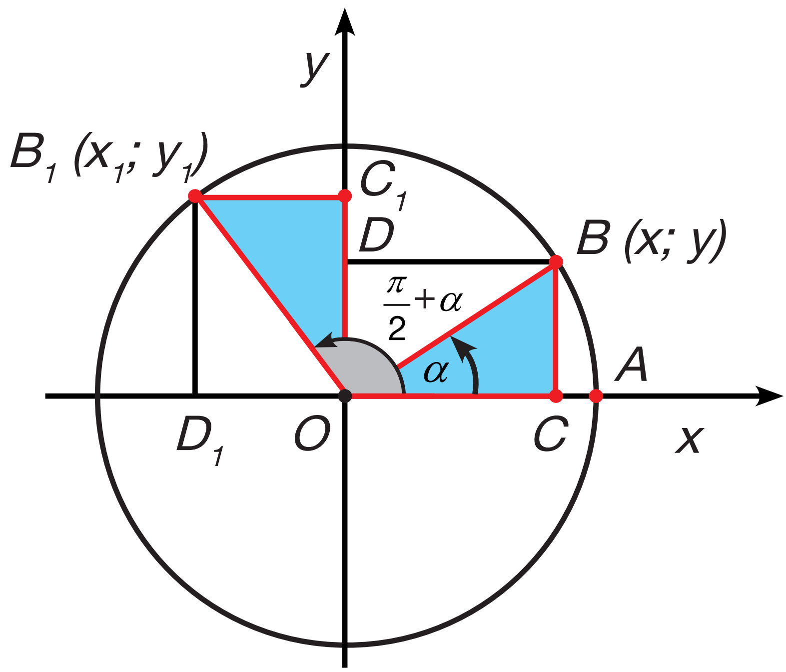


Рис. 45

Таким образом, в качестве ординаты точки B_1 можно взять абсциссу точки B, а в качестве абсциссы точки B_1 можно взять ординату точки B с противоположным знаком:

$$y_1 = x \text{ и } x_1 = -y,$$

или

$$\frac{y_1}{R} = \frac{x}{R} \text{ и } \frac{x_1}{R} = -\frac{y}{R}.$$

Вы знаете

По определению синус угла равен отношению ординаты точки (конца подвижного радиуса) к радиусу, т. е.:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{B_1D_1}{R} = \frac{y_1}{R}, \text{ а } \sin\alpha = \frac{BC}{R} = \frac{y}{R};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{OD_1}{R} = \frac{x_1}{R}, \text{ а } \cos\alpha = \frac{OC}{R} = \frac{x}{R}.$$

Из последних двух равенств получим две формулы приведения:

$$\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha; \; \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha.} \quad (1)$$

Пример: Докажем, что функция $y = \sin x$ имеет период 2π.

Решение. Поскольку $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, где $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ то добавление $2\pi n$ к аргументу синуса не меняет его значение. Предположим, что P — такое число, т. е. равенство $\sin(x+P)=\sin x$ справедливо для любого значения $\boldsymbol{x}$. Тогда оно имеет место и при $x=\frac{\pi}{2}$, т. е. $\sin(\frac{\pi}{2}+P)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, но по формуле приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2}+P\right)=\cos P$.

Из двух последних равенств следует, что $\cos P=1$, но мы знаем, что это верно лишь при $\cos P=2\pi n$. Так как наименьшим, отличным от нуля числом из $2\pi n$ является 2π, то это число и есть период функции $y=\sin x$. $\square$

Рассмотрим $\sin 2x = \sin(2x + 2\pi n) = = \sin\left[2(x + \pi n)\right]$. Значит, добавление πn к аргументу ***x*** не меняет значение функции. Наименьшее, отличное от нуля число из πn есть π, поэтому это период функции $y = \sin 2x$.

Чтобы вывести формулы приведения синуса и косинуса для угла $\frac{\pi}{2} - \alpha$, достаточно в формуле (1) заменить угол α на угол $-\alpha$, тогда получим:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$, так как функция косинус — четная;

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)\right) = -\sin(-\alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha,$$

так как функция синус — нечетная.

Таким образом, получили еще две формулы приведения:

$$\mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathbf{cos}\,\alpha;\quad \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathbf{sin}\,\alpha. \quad (2)$$

Эти две формулы справедливы для любого угла α, а не только для острого угла α.

Выведем формулы приведения синуса и косинуса для угла $\pi+\alpha$.

Для этого представим угол $\pi+\alpha$ в виде $\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ и дважды применим формулу (1).

Получим $\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$, $\cos(\pi+\alpha)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$

Таким образом:

$$\mathbf{sin}(\pi+\alpha)=-\mathbf{sin}\,\alpha;\quad \mathbf{cos}(\pi+\alpha)=-\mathbf{cos}\,\alpha. \quad (3)$$

Представив угол $\pi - \alpha$ в виде $\pi + (-\alpha)$, из формулы (3) найдем синус и косинус угла $\pi - \alpha$. Получим еще две формулы приведения:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha. \quad (4)$$

Докажите формулы (4).

Выведем формулы приведения синуса и косинуса угла $\frac{3\pi}{2} + \alpha$. Здесь также применяем тот же способ, который использовали при выводе формулы (3), другими словами, угол $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ представим в виде $\frac{\pi}{2} + (\pi + \alpha)$. Затем последовательно воспользуемся формулами (1) и (3). В результате получим:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right]=$$

$$=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=$$

$$=\cos\left[\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right]=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha.$$

$$\boldsymbol{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha;}$$

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.} \qquad (5)$$

Выведите формулы приведения синуса и косинуса угла $\frac{3\pi}{2}-\alpha$.

$$\boldsymbol{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha;}$$

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.} \qquad (6)$$

Выведем формулы приведения синусов и косинусов углов $2\pi + \alpha$ и $2\pi - \alpha$. Сначала рассмотрим формулы приведения для угла $2\pi + \alpha$.

Вы знаете

Если к углу α прибавить полный угол 2π, то от этого значения тригонометрических функций не изменятся.

Тогда получим еще две формулы приведения:

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha. \qquad (7)$$

Если в формуле (7) заменим угол α на угол $-\alpha$, то получим еще две формулы приведения:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha. \qquad (8)$$

1. Докажите формулы (8).

2. Используя формулу $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и выше доказанные формулы (1) — (8), докажите формулы приведения тангенса и котангенса (9—12):

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm ctg\alpha; \quad ctg\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp tg\alpha; \qquad (9)$$

$$tg(\pi \pm \alpha) = \pm tg\alpha; \quad ctg(\pi \pm \alpha) = \pm ctg\alpha; \qquad (10)$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp ctg\alpha;$$

$$ctg\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp tg\alpha; \qquad (11)$$

$$tg(2\pi \pm \alpha) = \pm tg\alpha; \quad ctg(2\pi \pm \alpha) = \pm ctg\alpha. \qquad (12)$$

Формулы приведения (1) — (12) занесем в одну таблицу:

Таблица 5

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90^\circ+\alpha)$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90^\circ-\alpha)$	$\pi+\alpha$ $(180^\circ+\alpha)$	$\pi-\alpha$ $(180^\circ-\alpha)$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
tgx	*–ctgx*	*ctgx*	*tgx*	*–tgx*
ctgx	*–tgx*	*tgx*	*ctgx*	*–ctgx*

x	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $(270^\circ+\alpha)$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $(270^\circ-\alpha)$	$2\pi+\alpha$ $(360^\circ+$ $+\alpha)$	$2\pi-\alpha$ $(360^\circ-$ $-\alpha)$
$\sin x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tgx	*–ctgx*	*ctgx*	*tgx*	*–tgx*
ctgx	*–tgx*	*tgx*	*ctgx*	*–ctgx*

Какую закономерность можно заметить из этой таблицы?

По данным таблицы ответьте на вопросы:

1. В каком случае (для каких углов) тригонометрическая функция не изменяется?
2. Когда (для каких углов) функция изменяется на схожую функцию (синус — на косинус, тангенс — на котангенс и, наоборот)?
3. Как устанавливается знак тригонометрической функции для правых частей формул приведения?

Правильно ответив на эти вопросы, получим вывод:

1) если аргумент (угол) некоторой приводимой тригонометрической функции имеет вид:

$\pi \pm \alpha\,(180^\circ \pm \alpha)$, $2\pi \pm \alpha\,(360^\circ \pm \alpha)$, то ее название не изменяется;

$\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\,(90^\circ \pm \alpha)$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha\,(270^\circ \pm \alpha)$, то ее название меняется: синус — на косинус, тангенс — на котангенс и, наоборот;

2) правая часть формул приведения имеет тот же знак, какой знак имеет приводимая функция в соответствующей четверти.

Пример: 1. Найдем значение $\sin\frac{7}{3}\pi$.

Решение.

$$\sin\frac{7}{3}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример: 2. Найдем значение $\cos(-780°)$.

Решение. $\cos(-780°) = \cos 780° =$

$$= \cos(2 \cdot 360° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример: 3.
Вычислим значение $ctg\left(-750^\circ\right)$.

Решение. $ctg\left(-750^\circ\right) = -ctg750^\circ =$

$= -ctg(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -ctg30^\circ = -\sqrt{3}.$

Ответ: $-\sqrt{3}$.

Пример: 4. Вычислим значение:

1) $\cos 510^\circ$; 2) $tg1665^\circ$; 3) $\sin\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right)$.

Решение.

1) $\cos 510^\circ = \cos(360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ =$

$= \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

2) $tg1665^\circ = tg(4 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = tg225^\circ =$

$= tg(180^\circ + 45^\circ) = tg45^\circ = 1;$

3) $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right) = -\sin\left(3\cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример: 5. Упростим выражение:

1) $ctg(-5\pi - \alpha)\sin(\alpha - 3\pi)$;

2) $\dfrac{\sin(2\pi - \alpha)tg(\pi + \alpha)ctg(-\alpha - \pi)}{\cos(\pi - \alpha)tg(3\pi - \alpha)}$.

Решение.

1) $ctg(-5\pi - \alpha)\sin(\alpha - 3\pi) =$

$= ctg\left[-(5\pi + \alpha)\right]\sin\left[-(3\pi - \alpha)\right] =$

$= -ctg(5\pi + \alpha)\left[-\sin(3\pi - \alpha)\right] = -ctg(\pi + \alpha)\times$

$\left[-\sin(\pi - \alpha)\right] = -ctg\alpha(-\sin\alpha) = \cos\alpha.$

2) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\,tg(\pi+\alpha)\,ctg(-\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)\,tg(3\pi-\alpha)}=$

$=\dfrac{-\sin\alpha\, tg\alpha\left[-ctg(\pi+\alpha)\right]}{-\cos\alpha\, tg(\pi-\alpha)}=$

$=\dfrac{-\sin\alpha tg\alpha(-ctg\alpha)}{-\cos\alpha(-tg\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1.$

Ответ: 1) $\cos\alpha$; 2) 1.

?

1. Какие формулы носят название формул приведения?

2. Надо ли запоминать отдельно каждую формулу приведения?

3. В каком случае при использовании формул приведения тригонометрическая функция меняется на противоположную функцию?

A

12.1. Приведите к тригонометрической функции угла α выражение:

1) $\sin(90^\circ-\alpha)$; 2) $\cos(90^\circ-\alpha)$;

3) $\sin(180^\circ - \alpha)$;

4) $\cos(180^\circ - \alpha)$;

5) $\sin(270^\circ + \alpha)$;

6) $\cos(270^\circ - \alpha)$;

7) $\sin(360^\circ - \alpha)$;

8) $\cos(360^\circ + \alpha)$;

9) $ctg(180^\circ - \alpha)$;

10) $tg(90^\circ + \alpha)$;

11) $ctg(270^\circ - \alpha)$;

12) $tg(360^\circ - \alpha)$.

12.2. Найдите значение выражения:

1) $\sin 225^\circ$;

2) $\sin 330^\circ$;

3) $\cos 210^\circ$;

4) $tg 225^\circ$;

5) $\cos 120^\circ$;

6) $ctg 150^\circ$.

12.3. Преобразуйте выражение:

1) $\sin(-225^\circ)$;

2) $\sin\frac{7\pi}{6}$;

3) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$;

4) $tg(-240^\circ)$;

5) $\cos\frac{25\pi}{3}$;

6) $ctg\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$;

7) $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$;

8) $tg\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

Упростите выражения (12.4—12.5):

12.4. 1) $1-\sin^2(270^\circ+\alpha)$;

2) $1-\cos^2(270^\circ-\alpha)$;

3) $1-\sin^2(360^\circ-\alpha)$;

4) $1-\cos^2(360^\circ+\alpha)$;

5) $1+ctg^2(270^\circ-\alpha)$;

6) $1+tg^2(360^\circ-\alpha)$.

12.5. 1) $\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)+$

$+ctg(270^\circ-\alpha)+tg(360^\circ-\alpha)$;

2) $\cos(90^\circ+\alpha)-\sin(180^\circ+\alpha)+$

$+ctg(270^\circ+\alpha)+tg(360^\circ+\alpha)$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)+$

$+ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+tg(2\pi+\alpha);$

4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)+$

$+tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+ctg(2\pi+\alpha).$

12.6. Приведите тригонометрическую функцию к функции угла α, где $\alpha(0\le\alpha\le\frac{\pi}{4})$:

1) $\sin 545°$;

2) $\cos 945°$;

3) $tg1545°$;

4) $ctg545°$;

5) $\sin\frac{9\pi}{4}$;

6) $\cos\frac{91\pi}{5}$;

7) $tg\frac{29\pi}{3}$;

8) $ctg\frac{39\pi}{7}$;

9) $\sin\left(-\frac{49\pi}{4}\right)$;

10) $\cos\left(-\frac{419\pi}{5}\right)$;

11) $\sin(-2489°)$;

12) $tg(-4789°)$.

12.7. Найдите значение выражения:

1) $ctg(-45°)\cdot\cos 225°\cdot\sin 150°$;

2) $tg(-135°)\cdot\cos 300°\cdot\sin 210°$;

3) $ctg\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\cos 150°\cdot\sin\frac{5\pi}{3}$;

4) $ctg(-225°)\cdot\cos\frac{8\pi}{3}\cdot\sin 330°$.

12.8. Докажите тождество:

1) $\cos^2(180°-x)+\cos^2(270°+x)=1$;

2) $\cos^2(720°-x)+\sin^2(540°+x)=1$;

3) $tg(2\pi - x)\,tg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -1;$

4) $ctg(6\pi - x)\,ctg\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = -1.$

B

12.9. Найдите знак значения выражения:

1) $\sin 135^\circ \cdot \cos 210^\circ \cdot tg 405^\circ \cdot ctg 330^\circ \cdot$

$\cdot \cos 560^\circ;$

2) $\sin 425^\circ \cdot \cos 250^\circ \cdot ctg 420^\circ \cdot tg 330^\circ \cdot$

$\cdot \sin 750^\circ;$

3) $\sin\frac{7\pi}{3} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} \cdot tg\frac{9\pi}{4} \cdot c\,tg\frac{13\pi}{6} \cdot \cos\frac{7\pi}{4};$

4) $\sin\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\frac{7\pi}{6} \cdot tg\frac{11\pi}{4} \cdot c\,tg\frac{8\pi}{3} \cdot \sin\frac{11\pi}{6}.$

12.10. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin(-\alpha)ctg(\pi-\alpha)}{\cos(360^\circ-\alpha)tg(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)ctg(2\pi-\alpha)}{\cos(720^\circ-\alpha)tg(2\pi+\alpha)}$;

3) $\dfrac{tg(-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)ctg(\pi+\alpha)}$.

12.11. Найдите значение выражения:

1) $\sin(-135^\circ)\cdot\cos 390^\circ\cdot tg405^\circ\cdot ctg(-330^\circ)$;

2) $\sin(-225^\circ)\cdot\cos(-480^\circ)\cdot ctg(-420^\circ)\cdot tg300^\circ$.

12.12. Докажите тождество:

1) $tgx+tg(180^\circ-x)+ctg(360^\circ-x)=$

$=ctg(180^\circ-x)$;

2) $ctgx+tg(90^\circ+x)+tg(360^\circ+x)=$

$=ctg(270^\circ-x)$;

3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin(180^\circ-\beta)+$

$+ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=tg\beta.$

12.13. Упростите выражение:

1) $\sin(2\pi-x)\cdot\cos(90^\circ+x)-\cos(2\pi+x)\cdot$

$\cdot\sin(270^\circ-x)-1;$

2) $\sin(4\pi-x)\cdot\cos(270^\circ-x)+\cos(\pi+x)\cdot$

$\cdot\sin(270^\circ+x)-1.$

12.14. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{tg\frac{5\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin 30^\circ};$

3) $\dfrac{tg135^\circ\sin135^\circ}{\cos^2\frac{\pi}{3}};$

2) $\dfrac{ctg135^\circ\sin225^\circ}{\cos\frac{\pi}{3}};$

4) $\dfrac{tg315^\circ\sin135^\circ}{\cos^2\frac{\pi}{6}}.$

12.15. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}-\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{1+\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}+\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)}{1+\cos(-\alpha)}$;

3) $tg^2(270^\circ+\alpha)\cdot\sin^2(180^\circ+\alpha)+tg\,315^\circ$;

4) $ctg^2(360^\circ-\alpha)\cdot\cos^2(270^\circ+\alpha)+\sin 270^\circ$.

12.16. Найдите числовое значение выражения:

1) $(\sin 315^\circ-\cos 315^\circ)^2$;

2) $(\sin 225^\circ-\cos 255^\circ)^2$;

3) $(\sin 135^\circ+\cos 135^\circ)^2$;

4) $(\sin 315^\circ+\cos 315^\circ)^2$.

12.17. Докажите, что верна формула:

1) $\sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha)$;

2) $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$;

3) $tg(45^\circ + \alpha) = ctg(45^\circ - \alpha)$;

4) $ctg(45^\circ + \alpha) = tg(45^\circ - \alpha)$;

5) $\sin(60^\circ - \alpha) = \cos(30^\circ + \alpha)$;

6) $ctg(80^\circ - \alpha) = tg(10^\circ - \alpha)$.

12.18. Докажите тождество:

1) $\dfrac{tg(\pi - x)}{\cos(\pi + x)} \cdot \dfrac{\sin(270^\circ + x)}{tg(270^\circ + x)} = tg^2 x$;

2) $\dfrac{\sin(\pi - x)}{tg(\pi + x)} \cdot \dfrac{ctg(270^\circ + x)}{ctg(270^\circ + x)} \cdot$

$\cdot \dfrac{\cos(2\pi - x)}{\sin x} = \sin x$.

12.19. Упростите и найдите значение выражения:

1) $tg(\pi-\alpha)-2tg(-\alpha)$ при $\alpha=-45°$;

2) $ctg(2\pi-\alpha)-2tg(-2\alpha)$ при $\alpha=30°$;

3) $\cos(3\pi-\alpha)-4\sin(-\alpha)$ при $\alpha=-45°$;

4) $\cos(3\pi-\alpha)-3\sin(-\alpha)$ при $\alpha=-30°$.

12.20. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(1-\cos(2\pi-\alpha))(1+\cos(2\pi+\alpha))}{\sin(\pi-\alpha)}$;

2) $\dfrac{(1-\sin(2\pi-\alpha))(1+\cos(2\pi+\alpha))}{\sin(\pi-\alpha)}$;

3) $\dfrac{tg(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;

4) $\dfrac{ctg(\pi+\alpha)\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

12.21. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos^2(\pi+\alpha)}{1-\sin\alpha}-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=1;$

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)}{1-\cos\alpha}-\cos(2\pi-\alpha)=1;$

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)}{1+\sin(-\alpha)}+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=1;$

4) $\dfrac{\sin^2(3\pi-\alpha)}{1-\cos(-\alpha)}+\cos(5\pi-\alpha)=1.$

С

12.22. 1) $\sin x$, если $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\dfrac{\pi}{2}=$

$=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, где $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

2) tgx, если $\sin(2\pi - x)\cdot\cos(\pi - x) +$

$+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = 0.$

12.23. Вычислите значение выражения:

1) $\sin 135^\circ \cdot \cos 210^\circ \cdot tg 405^\circ \cdot ctg 330^\circ$;

2) $\sin 225^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot ctg 420^\circ \cdot tg 300^\circ$;

3) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot tg\frac{7\pi}{4}\cdot ctg\frac{13\pi}{6}$;

4) $\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}\cdot tg\frac{11\pi}{4}\cdot ctg\frac{19\pi}{3}$.

12.24. Найдите значение выражения:

1) $tg 15^\circ \cdot tg 210^\circ \cdot tg 75^\circ \cdot ctg 330^\circ$;

2) $ctg 35^\circ \cdot ctg 55^\circ \cdot tg 420^\circ \cdot ctg 300^\circ$;

3) $\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot ctg\frac{7\pi}{4}\cdot tg\frac{13\pi}{6}$;

4) $\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}\cdot ctg\frac{11\pi}{4}\cdot tg\frac{19\pi}{3}$.

12.25. Найдите значение выражения:

1) $\sin 810^\circ \cos 900^\circ + tg\,585^\circ ctg\,1845^\circ +$
$+ \cos 135^\circ \sin 405^\circ$;

2) $\cos 105^\circ - \sin 195^\circ + \sin(-135^\circ) -$
$- \cos 135^\circ$;

3) $tg\,18^\circ tg\,288^\circ + \sin 32^\circ \sin 148^\circ -$
$- \sin 302^\circ \sin 122^\circ$.

П

12.26. Известно, что $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Вычислите:

1) $\sin\alpha$ и $ctg\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$;

2) $\cos\alpha$ и $ctg\alpha$, если $\sin\alpha = 0,6$;

3) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $tg\alpha = -4$;

4) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $ctg\alpha = -6$.

12.27. Из населенных пунктов A и B, длина пути между которыми по шоссе 75 км, отправились одновременно навстречу друг другу автобус и легковой автомобиль и встретились через полчаса. Автобус прибыл в пункт B на 25 мин позже, чем легковой автомобиль в пункт A. Найдите скорости автобуса и автомобиля.

12.28. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 3x - 18 \le 0, \\ |x-3| > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 12 \le 0, \\ |x+3| \le 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 14 < 0, \\ |x-1| \ge 2. \end{cases}$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

12.29. Упростите выражение:

1) $\cos(90^\circ+\alpha)-2\sin(180^\circ+\alpha)+$

$+ctg(270^\circ+\alpha)+tg(360^\circ+\alpha)$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(2\pi-\alpha)+$

$+ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg(2\pi+\alpha)$.

12.30. Постройте единичную окружность и вектор OA, где точка A лежит на окружности, составляющий с положительным направлением оси Ox угол в 60°, 120°, 210°, 270°.

§ 13. Формулы синуса и косинуса суммы и разности двух углов

Вы научитесь выводить и применять тригонометрические формулы суммы и разности углов.

Формулы, позволяющие выразить тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих же углов, называются **формулами сложения**.

Вначале выводим формулу косинуса разности двух углов через тригонометрические функции тех же углов. Для этого рассмотрим окружность, центр которой расположен в начале прямоугольной системы координат и с радиусом $R = OA$ (рис. 46).

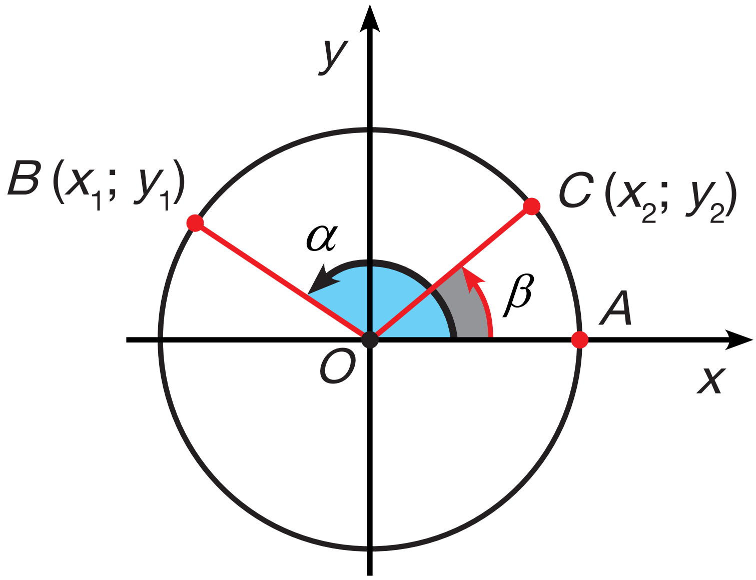


Рис. 46

Начальный радиус OA повернем вокруг точки O на углы α и β. В результате получим соответствующие радиусы OB и OC.

Из курса геометрии вам известно: если точка B имеет координаты x_1 и y_1, а точка C имеет координаты x_2 и y_2, то векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ также имеют, соответственно, те же координаты, $\overrightarrow{OB}=(x_1;y_1)$ и $\overrightarrow{OC}=(x_2;y_2)$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Получим равенство:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2. \qquad (1)$$

По определению косинуса и синуса углов α и β получим: $\cos\alpha = \dfrac{x_1}{R}$, $\sin\alpha = \dfrac{y_1}{R}$, $\cos\beta = \dfrac{x_2}{R}$, $\sin\beta = \dfrac{y_2}{R}$ (рис. 47). Выразим из этих равенств x_1, y_1, x_2, y_2.

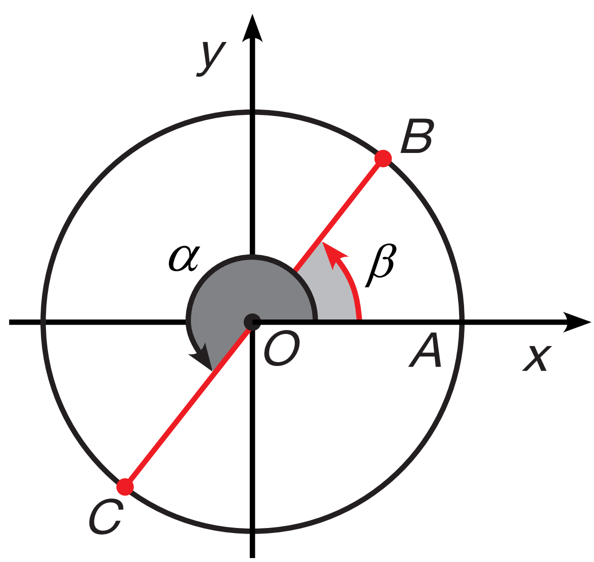


Рис. 47

Получим: $x_1 = R\cos\alpha$, $y_1 = R\sin\alpha$ $x_2 = R\cos\beta$, $y_2 = R\sin\beta$.

Подставляя значения x_1, y_1, x_2, y_2 в равенство (1), получим $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2\cos\alpha\ \times$

$\times \cos\beta + R^2\sin\alpha\sin\beta = R^2(\cos\alpha\cos\beta +$

$+ \sin\alpha\sin\beta)$.

Итак,

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}. \qquad (2)$$

Используя теорему о скалярном произведении двух векторов, левую часть равенства (2) запишем в виде:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\angle BOC}. \qquad (3)$$

Угол между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ есть угол BOC или угол, равный $\alpha-\beta$ (рис. 47). Но в общем виде угол BOC между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ может быть равным или

$\alpha - \beta$, или $2\pi - (\alpha - \beta)$, или может отличаться от них на кратное число полного угла.

Во всех указанных выше случаях получим $\cos\angle BOC = \cos(\alpha - \beta)$.

Используя последнее равенство и учитывая, что $\left|\overrightarrow{OB}\right| = R$, $\left|\overrightarrow{OC}\right| = R$, из равенства (3) можно записать:

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R \cdot R \cdot \cos(\alpha - \beta)$, или

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2 \cdot \cos(\alpha - \beta).} \qquad (4)$$

В равенствах (2) и (4) равны их левые части, значит и равны их правые части: $R^2 \cdot \cos(\alpha - \beta) = R^2 (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$. Упростив это выражение получим формулу:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.} \qquad (5)$$

Формулу (5) называют **формулой косинуса разности**.

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов.

Чтобы получить формулу косинуса суммы двух углов, т. е. косинуса суммы, используем формулу (5) и представим сумму $\alpha + \beta$ в виде разности $\alpha - (-\beta)$. Получим

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\left[\alpha - (-\beta)\right] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) +$$

$$+ \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$

так как $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, по свойствам четности косинуса и нечетности синуса.

Таким образом, получили формулу:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (6)$$

Формулу (6) называют **формулой косинуса суммы**.

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов.

Выведем формулы синуса суммы и разности двух углов. Для этого используем формулу (5) и формулы приведения.

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=$$

$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$$

$$+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\alpha\right]\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

так как по формулам приведения $\cos\left[\frac{\pi}{2}-\alpha\right]=\sin\alpha,\ \sin\left[\frac{\pi}{2}-\alpha\right]=\cos\alpha.$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.} \qquad (7)$$

Формулу (7) называют **формулой синуса суммы**.

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.

Выведем формулу синуса разности двух углов, используя формулу (7).

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\left[\alpha + (-\beta)\right] = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, так как $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ по свойствам четности косинуса и нечетности синуса.

Следовательно,

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (8)$$

Формулу (8) называют **формулой синуса разности**.

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

Пример: 1. Найдем значение cos105°, не используя ни таблицу, ни микрокалькулятор.

Решение. Представим угол 105° в виде суммы: 60° + 45°.

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60° \cos 45° -$$

$$\cdot \sin 60° \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3}).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$.

Пример: 2. Упростим выражение $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$.

Решение. Используем формулы синуса суммы и разности. В результате получим:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+$$
$$+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$$
$$=2\cos\alpha\sin\beta.$$

Ответ: $2\cos\alpha\sin\beta$.

?

1. Для каких углов α и β можно использовать формулы синуса и косинуса суммы и разности этих углов?
2. Назовите формулы сложения.

A

13.1. Упростите выражение:

1) $\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(\alpha-60^\circ)$;

2) $\cos(60^\circ+\alpha)+\cos(\alpha-60^\circ)$;

3) $\sin(30^\circ+\alpha)-\sin(30^\circ-\alpha)$;

4) $\cos(30^\circ+\alpha)-\cos(30^\circ-\alpha)$;

5) $\cos 2\varphi\cos 3\varphi+\sin 2\varphi\sin 3\varphi$;

6) $\sin\gamma\cos 2\gamma-\cos\gamma\sin 2\gamma$;

7) $\cos\frac{1}{3}\alpha\cos\frac{2}{3}\alpha-\sin\frac{1}{3}\alpha\sin\frac{2}{3}\alpha$;

8) $\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{3}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{3}{2}\gamma$.

13.2. Найдите значение выражения:

1) $\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ$;

2) $\cos 50^\circ\cos 5^\circ+\sin 50^\circ\sin 5^\circ$;

3) $\sin 71^\circ\cos 11^\circ-\cos 71^\circ\sin 11^\circ$;

4) $\cos 25^\circ\cos 65^\circ-\sin 25^\circ\sin 65^\circ$.

13.3. Вычислите:

1) $\cos\frac{8\pi}{15}\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{15}\cdot\sin\frac{\pi}{5}$;

2) $\cos\frac{1}{10}\pi\cdot\cos\frac{2}{5}\pi-\sin\frac{1}{10}\pi\cdot\sin\frac{2}{5}\pi$;

3) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{1}{9}\pi\cdot\cos\frac{4}{9}\pi-\cos\frac{1}{9}\pi\cdot\sin\frac{4}{9}\pi$.

13.4. Известно, что α и β — углы I четверти и $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$.

Вычислите:

1) $\sin(\alpha + \beta)$;

2) $\sin(\alpha - \beta)$;

3) $\cos(\alpha + \beta)$;

4) $\cos(\alpha - \beta)$.

13.5. Используя формулы сложения, найдите значение выражения:

1) $\sin 105°$;

2) $\cos 105°$;

3) $\sin 165°$;

4) $\cos 165°$.

13.6. С помощью формул сложения докажите тождество:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$;

2) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$;

4) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

13.7. Выразите через тригонометрические функции угла α выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

2) $cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

5) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

6) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

13.8. Используя формулы сложения, вычислите:

1) $\sin 15°$;

2) $\sin 75°$;

3) $\cos 15°$;

4) $\cos 75°$;

5) $tg 15°$;

6) $tg 75°$;

7) $ctg 15°$;

8) $ctg 75°$.

13.9. Найдите значение выражения:

1) $\sin(45^\circ - \alpha)$, если $\sin\alpha = 0{,}3$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) $\sin(60^\circ + \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}4$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

3) $\cos(45^\circ - \alpha)$, если $\sin\alpha = 0{,}2$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

4) $\sin(30^\circ + \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}1$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

B

13.10. Упростите выражение:

1) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha$;

2) $\dfrac{1}{2}\cos\alpha - \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

3) $\sqrt{2}\sin\alpha - 2\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

13.11. Упростите выражение:

1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta\cos\alpha$;

2) $\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha + \beta)$;

3) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta$;

4) $\cos\alpha\sin\beta + \sin(\alpha - \beta)$.

Найдите значения выражений (13.12—13.13):

13.12. 1) $\sin(45^\circ - \alpha)$, если $\cos\alpha = -0{,}5$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

2) $\sin(60^\circ + \alpha)$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

3) $\cos(60^\circ + \alpha)$, если $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

4) $\cos(30^\circ - \alpha)$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

13.13. 1) $\dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{20}\cdot\cos\dfrac{21\pi}{10}+\cos\dfrac{3\pi}{20}\cdot\sin\dfrac{\pi}{10}}{\cos\dfrac{7\pi}{24}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}+\sin\dfrac{7\pi}{8}\cdot\sin\dfrac{7\pi}{24}}$;

2) $\dfrac{\sin\dfrac{15\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{4\pi}{21}+\cos\dfrac{4\pi}{21}\cdot\cos\dfrac{6\pi}{7}}{\sin\dfrac{7\pi}{24}\cdot\cos\dfrac{\pi}{24}-\cos\dfrac{7\pi}{24}\cdot\sin\dfrac{23\pi}{24}}$.

13.14. Упростите выражение:

1) $\cos\beta + \sin\beta - \sqrt{2}\sin(45^\circ + \beta)$;

2) $\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta - 2\cos(60^\circ - \beta)$;

3) $\cos\beta - \sin\beta - \sqrt{2}\sin(45^\circ - \beta)$;

4) $\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta - 2\cos(30^\circ - \beta)$.

13.15. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos\beta = \cos\alpha\sin\beta$;

2) $\cos(\alpha - \beta) - \sin(-\alpha)\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta$;

3) $\sin(\alpha - \beta) + \cos(-\alpha)\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta$;

4) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(-\alpha)\cos(-\beta) = -\sin\alpha\cos\beta$;

5) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$;

6) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;

7) $\sin(\alpha + \beta)\cdot\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

8) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

13.16. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$;

4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

C

13.17. Докажите тождество:

1) $\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cos(\alpha+\gamma)=$

$=\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$;

2) $\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma+\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha=$

$=\sin(\alpha-\gamma)\sin\beta$.

13.18. Докажите, что если α, β и γ — углы треугольника, то верно равенство:

1) $\sin\alpha = \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma$;

2) $\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$.

13.19. Значения синусов двух острых углов треугольника равны 0,6 и 0,8. Найдите значение синуса третьего угла треугольника.

13.20. Значения косинусов двух углов треугольника равны $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. Найдите значение косинуса третьего угла треугольника.

П

13.21. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y - 5xy = 0, \\ x - y - xy = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x. \end{cases}$

13.22. 1) Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Найдите процент примесей в руде.

2) Свежие грибы содержат 90% влаги, сушеные — 12%. Сколько сушеных грибов получится из 20 кг свежих?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

13.23. Докажите тождество:

1) $tg\alpha + ctg\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha \cos\alpha}$;

2) $tg\alpha + ctg\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta \cos\alpha}$.

13.24. Упростите выражение:

1) $1 - tg\alpha \cdot tg\beta$; 2) $ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1$.

13.25. Найдите значение $tg\alpha$ и $ctg\alpha$, если

$\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

§ 14. Формулы тангенса и котангенса суммы и разности двух углов

Вы научитесь выводить и применять формулы тангенса и котангенса суммы и разности углов.

Вывести формулы сложения для тангенса и котангенса можно с помощью формул (5) и (8) из § 13, а также формул, через которые тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус.

Для примера выведем формулу тангенса суммы:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель полученной дроби на произведение

$\cos\alpha \cdot \cos\beta$, предполагая, что $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$.

Тогда получим:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}.$$

Значит,

$$\boldsymbol{tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}}. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют формулой тангенса суммы.

Тангенс суммы двух углов равен сумме тангенсов, деленной на разность единицы и произведения тангенсов этих углов.

Докажите, что верна формула тангенса разности:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}\ . \qquad (2)$$

Объединив формулы (1) и (2), пишут:

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}. \qquad (3)$$

Докажите двумя способами, что верна формула котангенса суммы и разности:

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}\ \text{и}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{1+tg\alpha tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}, \qquad (4)$$

или $ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{1\mp tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha\pm tg\beta}$.

Пример: Найдем значение тангенса суммы углов α и β, если $tg\alpha = \frac{1}{2}$, $tg\beta = \frac{1}{3}$, α и β — острые углы.

Решение. Для нахождения значения тангенса суммы $\alpha + \beta$ воспользуемся формулой (1), тогда:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

$tg(\alpha + \beta) = 1$, отсюда следует $\alpha + \beta = 45°$.

Ответ: 45°.

1. Для каких углов α и β можно использовать формулы тангенса и котангенса суммы и разности этих углов?
2. Что означают знаки $\pm$ и $\mp$ в формулах суммы и разности тангенсов двух углов? Как их используют при применении формулы с этими знаками?

A

14.1. Известно, что $tg\alpha = \frac{1}{3}$, $tg\beta = \frac{3}{5}$. Найдите:

1) $tg(\alpha + \beta)$;
2) $tg(\alpha - \beta)$;
3) $ctg(\alpha + \beta)$;
4) $ctg(\alpha - \beta)$.

14.2. Найдите значения: $ctg(\alpha + \beta)$; и $ctg(\alpha - \beta)$, если $ctg\alpha = 2$ и $ctg\beta = -1{,}6$.

14.3. Используя формулы сложения для тангенса и котангенса, найдите значения:

1) $tg15°$;
2) $ctg15°$;
3) $tg75°$;
4) $tg105°$;
5) $ctg75°$;
6) $ctg105°$.

14.4. Выразите через тригонометрические функции угла α:

1) $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

2) $ctg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $tg\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

4) $ctg\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

5) $tg\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

6) $ctg\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

14.5. Найдите значение выражения:

1) $\frac{tg20^\circ+tg25^\circ}{1-tg20^\circ tg25^\circ}$;

2) $\frac{tg70^\circ-tg10^\circ}{1+tg70^\circ tg10^\circ}$;

3) $\frac{tg\frac{7\pi}{24}-tg\frac{\pi}{8}}{1+tg\frac{7\pi}{24}\,tg\frac{\pi}{8}}$;

4) $\frac{tg\frac{\pi}{20}+tg\frac{\pi}{5}}{1-tg\frac{\pi}{20}\,tg\frac{\pi}{5}}$.

B

14.6. Упростите выражение:

1) $tg(\alpha+\beta)-tg\alpha\cdot tg\beta tg(\alpha+\beta)$;

2) $tg(\alpha+\beta)\cdot tg(\alpha-\beta)\cdot\left(1-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta\right)$.

14.7. Докажите тождество:

1) $\dfrac{tg(\alpha+\beta)-tg\alpha-tg\beta}{tg\alpha tg(\alpha+\beta)}=tg\beta$;

2) $tg(\alpha-\beta)+tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg(\alpha-\beta)=tg\alpha-tg\beta$.

14.8. Упростите выражение:

1) $\dfrac{tg^2 25^\circ-tg^2 15^\circ}{1-tg^2 25^\circ tg^2 15^\circ}$; 2) $\dfrac{tg^2 1{,}8-tg^2 1{,}2}{1-tg^2 1{,}8 tg^2 1{,}2}$.

14.9. Преобразуйте выражение:

1) $tg(45^\circ+\alpha)\cdot tg(45^\circ-\alpha)$;

2) $tg(\alpha+60^\circ)\cdot tg(\alpha-60^\circ)$;

3) $\dfrac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}-tg\left(45^\circ-\alpha\right);$

4) $tg\left(45^\circ+\alpha\right)-\dfrac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}.$

14.10. Докажите тождество:

1) $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}-\dfrac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}+\dfrac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\sin\alpha\sin\beta}=$

$=ctg\alpha+ctg\beta;$

2) $\dfrac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin\left(\beta-x\right)}{\sin\beta\sin x}+\dfrac{\sin\left(x-\alpha\right)}{\sin x\sin\alpha}=0.$

C

14.11. Докажите, что если α и β — углы I четверти, то верно неравенство:

1) $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$;

2) $\sin(\alpha+\beta) < \cos\alpha + \cos\beta$;

3) $\cos(\alpha-\beta) < \cos\alpha + \sin\beta$;

4) $tg(\alpha+\beta) > tg\alpha + tg\beta$.

14.12. Упростите выражение:

1) $(tg\alpha - 1)\cdot tg\beta + (tg\alpha + tg\beta)\cdot ctg(\alpha+\beta)$;

2) $1 - \dfrac{tg(\alpha+\beta) - tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha\, tg(\alpha+\beta)}$.

14.13. Известно, что $tg\alpha = \dfrac{3}{8}$, $tg\beta = \dfrac{5}{11}$, где α и β — углы первой четверти. Докажите, что $\alpha+\beta = 45°$.

14.14. Докажите тождество:

1) $\dfrac{tg4\beta - tg3\beta}{1 + tg4\beta tg3\beta} = tg(\beta - 5\pi)$;

2) $\dfrac{tg^2 2\beta - tg^2\beta}{1 - tg^2 2\beta tg^2\beta} = tg\beta \cdot tg3\beta$.

П

14.15. Найдите множество значений выражения:

1) $\sin\alpha + 2\cos\alpha$;

2) $3\sin\alpha - \cos\alpha$;

3) $\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma$;

4) $\sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta$;

5) $5\sin\alpha - 4\cos\alpha$;

6) $\cos\gamma + 3\sin\gamma$.

14.16. Значения синусов двух острых углов треугольника равны 0,6 и 0,8. Найдите косинус третьего угла этого треугольника.

14.17. Решите неравенство:

1) $x^2 + 3|x| - 18 \geq 0$;

2) $x^2 + 2|x - 2| - 9 \leq 0$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

14.18. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) =$
$= \cos\alpha \sin(-\beta)$;

2) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) =$
$= 2\cos\alpha \cos(-\beta)$;

3) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \alpha) =$
$= 2\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

4) $\sin(\beta - \alpha)\sin(\alpha + \beta) = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha$.

14.19. Упростите выражение:

1) $\sin\beta + \cos\beta + \sqrt{2}\sin(45^\circ - \beta)$;

2) $\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta - 2\cos(\beta - 30^\circ)$.

14.20. Докажите тождество:

1) $\dfrac{tg5\beta - tg3\beta}{1 + tg5\beta tg3\beta} = tg2\beta$;

2) $\dfrac{tg^2 3\beta - tg^2\beta}{1 - tg^2 3\beta tg^2\beta} = tg2\beta \cdot tg4\beta$.

§ 15. Формулы тригонометрических функций двойного и половинного углов

Вы научитесь выводить и применять формулы двойного и половинного углов.

При упрощении тригонометрических выражений, доказательстве тождеств и многих других случаях приходится выражать тригонометрические функции двойного угла через тригонометрические функции того же самого угла. Иными словами, синус, косинус, тангенс и котангенс угла 2α надо выразить через тригонометрические функции угла α.

Формулы двойного угла можно вывести, используя формулы сложения. Так, например, чтобы выразить $\sin 2\alpha$ через тригонометрические функции угла α, применим формулу синуса суммы: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. В этой формуле угол β заменим на угол α, тогда получим:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Таким образом, доказали формулу синуса двойного угла:

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.} \qquad (1)$$

Синус двойного угла равен удвоенному произведению синуса этого угла на косинус этого угла.

Докажите, что верны формулы:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}. \qquad (3)$$

$$ctg2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}. \qquad (4)$$

Формулы (1) — (4) называются **формулами двойного угла**.

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha =$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2}{ctg\alpha - tg\alpha}.$$

Пример: 1. Упростим выражение $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$.

Решение. Представим угол 80° в виде произведения двух множителей и применим формулу (2). Получим

$$\cos 80^\circ = \cos(2 \cdot 40^\circ) = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ =$$

$$= (\cos 40^\circ + \sin 40^\circ) \cdot (\cos 40^\circ - \sin 40^\circ).$$

Подставим вместо $\cos 80^\circ$ выражение

$(\cos 40° + \sin 40°) \cdot (\cos 40° - \sin 40°)$ в выражение $\frac{\cos 80°}{\cos 40° + \sin 40°}$.

Тогда получим $\frac{\cos 80°}{\cos 40° + \sin 40°} =$

$$= \frac{(\cos 40° + \sin 40°)(\cos 40° - \sin 40°)}{\cos 40° + \sin 40°} =$$

$= \cos 40° - \sin 40°.$

Ответ: $\cos 40° - \sin 40°$.

Пример: 2. Докажем тождество $4\sin\alpha\cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin 4\alpha$.

Решение. Для левой части равенства одновременно применим формулы синуса двойного угла (1) и косинуса двойного угла (2), тогда получим $4\sin\alpha\cos\alpha \cdot$

$\cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$.

Пример: 3. Вычислим значение $\sin 2\alpha$, зная, что $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, чтобы вычислить значение $\sin 2\alpha$, надо знать значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Значение $\sin\alpha$ известно, $\cos\alpha$ — неизвестно. Найдем его, используя основное тригонометрическое тождество и учитывая, что α — угол первой четверти. Получим

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Найдем значение $\sin 2\alpha$:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9},$$

или $\sin 2\alpha = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

Докажите, что верны формулы.

Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

Выведем формулы тригонометрических функций половинного угла. Для этого используем известную нам формулу косинуса двойного угла (2): $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ — это равенство имеет место для любого угла, в том числе и для угла $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, мы можем в данной формуле вместо угла $\frac{\pi}{2}$ поставить угол α, тогда получим

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

или

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{(A)}$$

Запишем основное тригонометрическое тождество для угла $\frac{\alpha}{2}$:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{(B)}$$

Сложим почленно левые и правые части равенств (A) и (B), получим

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

отсюда $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Почленно вычитая из равенства (B) равенство (A) получим $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, отсюда $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Формулы косинуса и синуса половинного угла

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad (5)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (6)$$

Докажите, что верны формулы тангенса и котангенса половинного угла:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Пример: 4. Известно, что $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Найдем значения: $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $tg\dfrac{\alpha}{2}$.

Решение. Поскольку $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, то $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ$, т. е. $\frac{\alpha}{2}$ находится во II четверти. Синус этого угла будет положительным числом, косинус — отрицательным:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Значение $tg\frac{\alpha}{2}$ можно найти двумя способами:

Способ 1.

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}} = -2.$$

Способ 2.

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{2}:\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-2.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{2};\ -\frac{\sqrt{5}}{5};-2.$

Выразим $tg\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

так как $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$

или

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

так как $2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$.

Отсюда, $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Пример: 5. Найдем значение $tg\frac{\pi}{8}$.

Решение. Угол $\frac{\pi}{8}$ находится в I четверти, тогда

$$tg\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1.$$

Ответ: $\sqrt{2}-1$.

Пример: 6. Докажем тождество $\frac{\cos^2\alpha}{ctg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

Доказательство.

$$\frac{\cos^2\alpha}{ctg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha.$$

?

1. Для каких углов α и β можно использовать формулы косинуса, синуса и тангенса двойного и половинного углов?

2. Для каких углов α и β можно использовать формулы понижения степени?

A

15.1. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin2x}{2\cos x}$;

2) $\frac{2\sin^2 x}{\sin2x}$;

3) $\sin^2 x-\cos^2 x$;

4) $\frac{\cos2x}{\sin x-\cos x}$;

5) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$;

6) $\dfrac{\cos\alpha - \sin 2\alpha}{1 - 2\sin\alpha}$;

7) $\dfrac{(\sin x - \cos x)^2}{1 - \sin 2x}$;

8) $\dfrac{\cos 2\alpha\, tg 2\alpha}{2\sin\alpha}$;

9) $\dfrac{2\cos x \cos 2x}{ctg 2x}$.

15.2. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{8}}{1-\sin^2\dfrac{\pi}{8}}$;

2) $\dfrac{2tg\dfrac{\pi}{12}}{1-tg^2\dfrac{\pi}{12}}+1$;

3) $2-\dfrac{2tg75^\circ}{1-tg^2 75^\circ}$;

4) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

5) $4\sin 15^\circ \cos 15^\circ \cos 30^\circ$;

6) $\cos^2 15^\circ \cos^2 75^\circ$.

15.3. Упростите:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$;

4) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;

5) $\dfrac{\sin 40^\circ}{2\cos 20^\circ}$;

6) $\dfrac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ}$;

7) $\dfrac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ}$;

8) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

15.4. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,2$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $tg 2\alpha$, если $tg\alpha = \dfrac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

15.5. Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

3) $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

15.6. Найдите значение $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $ctg 2\alpha$ и $tg 2\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

15.7. Найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2} = 0,5$.

15.8. Упростите выражение:

1) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos 2\alpha$;

2) $\cos 2\beta - tg\beta - \cos 2\beta tg\beta$;

3) $ctg\varphi - \sin 2\varphi - ctg\varphi\cos 2\varphi$;

4) $\dfrac{1}{1-tg\alpha} - \dfrac{1}{1+tg\alpha}$;

5) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2$;

6) $1+\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$;

7) $\cos\alpha(\cos\alpha + \cos\beta) + \sin\alpha(\sin\alpha + \sin\beta)$;

8) $1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2ctg 2\alpha$;

9) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos 2\alpha$;

10) $c\,tg 2\alpha - ctg\alpha$.

15.9. Дано: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $90° < \alpha < 180°$.

Найдите: а) $\sin 2\alpha$; б) $\sin\frac{\alpha}{2}$.

15.10. Найдите значения: $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $ctg\frac{\alpha}{2}$ и $tg\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

15.11. Найдите значения: $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $tg\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = \frac{14}{50}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

15.12. Дано: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $180° < \alpha < 270°$.

Найдите: а) $\cos 2\alpha$; б) $\cos\frac{\alpha}{2}$.

15.13. Докажите тождество:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

B

15.14. Упростите выражение:

1) $1-8\sin2\beta\cdot\cos2\beta$;

2) $tg\beta\cdot(1+\cos2\beta)-\sin2\beta$;

3) $\dfrac{2\sin\beta-\sin2\beta}{\sin2\beta+\sin2\beta}$;

4) $\dfrac{ctg(45^\circ-\beta)}{1-ctg^2(45^\circ-\beta)}$.

15.15. 1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

3) $4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin(270^\circ - \alpha)$;

4) $\dfrac{\sin^2\alpha\ ctg\alpha}{\sin 2\alpha}$.

15.16. 1) Пусть $tg\alpha = \dfrac{5}{6}$ и $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$. Найдите: $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $tg 2\alpha$.

2) Пусть $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$. Найдите: $\sin 0{,}5\alpha$; $\cos 0{,}5\alpha$; $tg 0{,}5\alpha$.

15.17. Вычислите:

1) $tg\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$

и $\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}$;

2) $tg\beta+ctg\beta$, если $\cos 2\beta=0{,}8$

и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;

3) $tg^2\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin 2\alpha=-\frac{1}{3}$.

15.18. 1) Пусть $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Найдите: $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $ctg 2\alpha$.

2) Пусть $tg\alpha=\frac{3}{4}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите:

$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $ctg 2\alpha$.

3) Пусть $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите: $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $ctg\dfrac{\alpha}{2}$.

C

15.19. Выведите формулы:

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

3) $tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$.

15.20. Известно, что $tg\dfrac{\alpha}{2} = -2$. Найдите:

1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$.

15.21. Вычислите:

1) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$;

2) $\sin^2 10^\circ \cdot \sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 70^\circ$;

3) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$;

4) $\cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5}$;

5) $\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{3\pi}{10}$.

15.22. Докажите тождество:

1) $4\sin^3 \alpha \cdot \cos 3\beta + 4\cos^3 \beta \cdot \sin 3\beta =$

$= 3\sin 4\beta$;

2) $\frac{\cos^3 \beta - \cos 3\beta}{\sin^3 \beta + \sin 3\beta} = tg\beta$.

15.23. Докажите тождество:

1) $\sin 2x < 2\sin x$, если $0 < x < \pi$;

2) $\sin 2x < 2\cos x$, если $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

15.24. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\cos^2 x + 3\sin^2 x$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x$;

3) $\sin^6 x + \cos^6 x$.

15.25. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right) - \sin\beta$;

2) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right) - \cos\beta$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15.26. Представьте в виде произведения выражение:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;

2) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;

3) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$;

4) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

§ 16. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

Вы научитесь выводить и применять формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Представим угол α в виде суммы: $\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ и угол β — в виде разности: $\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Преобразуем сумму $\sin\alpha+\sin\beta$:

Получим $\sin\alpha+\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)+$

$$+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos=\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получили формулу суммы синусов:

$$\mathbf{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.} \qquad (1)$$

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Преобразуем разность $\sin\alpha-\sin\beta$.

Получим $\sin\alpha-\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-$

$$-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получили формулу разности синусов:

$$\boldsymbol{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.} \qquad (2)$$

> Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на синус их полуразности.

Преобразуем сумму $\cos\alpha+\cos\beta$.

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+$$

$$+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$$

$$-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{2-\beta}{2}.$$

Получили формулу суммы косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (3)$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Преобразуем разность $\cos\alpha - \cos\beta$.

Получим

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) -$$
$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} -$$
$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} -$$
$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получили формулу разности косинусов:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (4)$$

Разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности, взятому со знаком минус.

Преобразуем сумму $tg\alpha + tg\beta$:

Получим $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} =$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Получили формулу суммы тангенсов:

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \quad (5)$$

Сумма тангенсов двух углов равна синусу суммы этих углов, деленному на произведение косинусов этих углов.

Докажите формулу разности тангенсов
$tg\alpha - tg\beta = = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Формула разности тангенсов:

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (6)$$

Разность тангенсов двух углов равна синусу разности этих углов, деленному на произведение косинусов этих углов.

Пример: 1. Вычислим значение суммы $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$.

Решение. По формуле

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ получим:

$$\cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2\cos 45^\circ \cos 30^\circ =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Пример: 2. Преобразуем в произведение сумму $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

Решение. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha =$

$$= (\sin\alpha + \sin 3\alpha) + \sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha \cos\alpha +$$

$$+ \sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha \left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2\sin 2\alpha (\cos\alpha +$$

$$+ \cos 60^\circ) = 4\sin 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $4\sin 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Пример: 3. Преобразуем в произведение сумму $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Решение.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Ответ: $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

?

1. Для каких углов α и β можно использовать формулы суммы и разности тригонометрических функций этих углов?
2. Какие формулы можно применить, чтобы преобразовать в произведение сумму (разность) тангенса и котангенса некоторого угла?

A

16.1. Представьте тригонометрическое выражение в виде произведения:

1) $\sin 3x + \sin 5x$; 2) $\sin 2\beta + \sin 6\beta$;

3) $\sin 15^\circ + \sin 15^\circ$;

4) $\sin 130^\circ + \sin 10^\circ$;

5) $\cos 3x + \cos 7x$;

6) $\cos 13\alpha - \cos 5\alpha$;

7) $\cos 13^\circ - \cos 27^\circ$;

8) $\cos 78^\circ + \cos 18^\circ$.

Преобразуйте выражение в произведение (16.2 – 16.3):

16.2. 1) $\sin\dfrac{\pi}{5} + \sin\dfrac{3\pi}{5}$;

2) $\cos\dfrac{2\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{6}$;

3) $\sin\dfrac{3\pi}{10} - \sin\dfrac{\pi}{10}$;

4) $\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{3\pi}{4}$;

5) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

6) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$.

16.3 1) $\sin x + \sin y$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

4) $\sin x - \cos y$;

5) $\sin 2x + \cos 4x$;

6) $\cos\beta - \sin 6\beta$.

16.4. Преобразуйте в произведение тригонометрическое выражение:

1) $\sin\alpha + \dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha$;

3) $\dfrac{1}{2} - \sin\alpha$;

4) $\sin\alpha + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha$;

6) $\cos\alpha + \dfrac{1}{2}$.

16.5 1) $\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\frac{1}{2} - \cos\alpha$;

3) $1 + 2\cos x$;

4) $2\cos x - \sqrt{2}$;

5) $\sqrt{3} - 2\sin 4x$;

6) $\sqrt{3} + 2\cos 2x$.

16.6. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin 37^\circ + \sin 23^\circ}{\sin 37^\circ - \sin 23^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos 20^\circ - \cos 140^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 140^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin 55^\circ - \sin 35^\circ}{\cos 55^\circ - \cos 35^\circ}$;

4) $\dfrac{\cos 25^\circ - \cos 85^\circ}{\sin 25^\circ + \sin 85^\circ}$;

5) $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$;

6) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$;

7) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}$;

8) $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$.

16.7 1) $\dfrac{\cos 5x - \cos x}{\sin 5x + \sin x}$;

2) $\dfrac{\sin 2x - \sin x}{\cos 2x + \cos x}$;

3) $\dfrac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x - \cos 6x}$;

4) $\dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{\sin 2x - \sin 3x}$;

5) $\dfrac{\sin 4\alpha - \sin 6x}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha}$;

6) $\dfrac{\sin 7\beta + \sin 11\beta}{\cos 10\beta - \cos 8\beta}$;

7) $\dfrac{\cos\left(45^\circ - \alpha\right) + \cos\left(45^\circ + \alpha\right)}{\sin\left(45^\circ - \alpha\right) + \sin\left(45^\circ + \alpha\right)}$;

8) $\dfrac{\sin\left(45^\circ + \alpha\right) + \sin\left(45^\circ - \alpha\right)}{\sin\left(45^\circ + \alpha\right) - \sin\left(45^\circ - \alpha\right)}$.

16.8. Преобразуйте выражение:

1) $tg75° - tg15°$;
2) $ctg11° + ctg34°$;
3) $tg25° + tg65°$;
4) $tg85° + ctg85°$;
5) $ctg50° - ctg20°$;
6) $tg25° - ctg85°$;
7) $tg15° + ctg75°$;
8) $ctg15° - tg75°$.

B

16.9. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = tg3\alpha$;

2) $\dfrac{\sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha} = tg5\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha + 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha} = -ctg3\alpha$;

4) $\dfrac{\sin 6\alpha + \sin 7\alpha - \sin 8\alpha - \sin 9\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha} = -tg\alpha$.

16.10. Преобразуйте в произведение выражение:

1) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 3) $\frac{3}{4} - \sin^2 x$;

2) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$; 4) $\cos^2 x - \frac{1}{2}$.

16.11. Упростите выражение:

1) $\frac{2\sin^2 49^\circ - 1}{\cos 53^\circ - \cos 37^\circ}$;

2) $\frac{\sin 11^\circ - \sin 49^\circ}{1 - 2\cos^2 54^\circ 30'}$;

3) $\frac{3\sin 124^\circ - \cos 146^\circ - 2\cos 34^\circ}{\cos 49^\circ \cos 15^\circ + \cos 41^\circ \cos 75^\circ}$;

4) $\frac{6\sin 25^\circ - 3\cos 65^\circ + 7\sin 155^\circ}{\cos 53^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \cos 78^\circ}$.

16.12. Преобразуйте выражение и найдите его значение:

1) $\frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2\sin 88^\circ \cos 4^\circ \sin 42^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cos 15^\circ \cos 24^\circ}$;

3) $\dfrac{\cos 16^\circ - \cos 24^\circ - \cos 32^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 86^\circ \sin 8^\circ \cos 28^\circ}$;

4) $\dfrac{\sin 48^\circ - \sin 60^\circ - \sin 72^\circ + \sin 84^\circ}{4\cos 84^\circ \sin 12^\circ \sin 66^\circ}$.

C

16.13. Преобразуйте в произведение выражение:

1) $1 + \sin\beta + \cos\beta$;

2) $1 + \sin\beta - \cos\beta$;

3) $1 - \sin\beta + \cos\beta$;

4) $1 - \sin\beta - \cos\beta$.

16.14. Разложите на множители или представьте в виде дроби выражение:

1) $3 - 4\sin^2 4\alpha$;

2) $4\cos^2 4\beta - 3$;

3) $tg^2 5\beta - 3$;

4) $1 - ctg^2 3\alpha$.

16.15. Докажите тождество:

1) $\dfrac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{3+4\cos 2x+\cos 4x}=tg^4 x;$

2) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+\sin(3\pi-4x)-\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}+6x\right)}{4\sin(5\pi-3x)\cos(x-4\pi)}=$

$=\cos 2x.$

16.16. Вычислите:

1) $tg9^\circ - tg27^\circ - tg63^\circ + tg81^\circ;$

2) $ctg7{,}5^\circ - tg7{,}5^\circ + tg67{,}5^\circ - ctg67{,}5^\circ;$

3) $4(\cos 24^\circ - \cos 12^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ);$

4) $\cos^2 3^\circ + \cos^2 117^\circ + \cos^2 123^\circ.$

16.17. Найдите:

1) $\cos\beta$, если $\sin\beta = 0{,}6$ и $90^\circ < \beta < 180^\circ;$

2) $\sin\beta$, если $\cos\beta = -0{,}2$ и $180° < \beta < 270°$;

3) $tg\beta$, если $\cos\beta = -0{,}4$ и $90° < \beta < 180°$;

4) $ctg\beta$, если $\sin\beta = -0{,}3$ и $270° < \beta < 360°$.

16.18. Вычислите:

1) $\dfrac{5}{6+7\sin 2\beta}$, если $tg\beta = 0{,}2$;

2) $\dfrac{4}{3+4\cos 2\beta}$, если $tg\beta = 0{,}2$;

3) $\dfrac{1}{2+3\sin 2\beta}$, если $tg\beta = 0{,}1$;

4) $\dfrac{2}{5-\cos 2\beta}$, если $tg\beta = 0{,}3$.

16.19. Упростите выражение:

1) $\sin(\pi + x)\cdot\sin(4\pi + x) - \cos(6\pi - 2x)$;

2) $\sin(2\pi + 2x) + 4\sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

16.20. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 \le 0, \\ \left|4x^2 - 3\right| > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0, \\ \left|2x^2 - 5\right| < 3. \end{cases}$

3

16.21. Преобразуйте тригонометрическое выражение:

1) $\cos(\alpha + 2\beta) + \sin\alpha \cdot \sin 2\beta$;

2) $\cos(3\alpha - 2\beta) - \sin 3\alpha \cdot \sin 2\beta$.

16.22. Преобразуйте выражение:

1) $\sin(2\alpha + \beta) - \sin 2\alpha \cdot \cos\beta$;

2) $\sin(3\alpha + 2\beta) + \cos 3\alpha \cdot \sin 2\beta$.

§ 17. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму или разность

Вы научитесь выводить и применять формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.

Используя формулы сложения, можно получить формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Действительно, используя формулы синуса суммы и разности двух углов, найдем $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$. Для этого почленно сложим равенства:

$$+\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Получим равенство:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta.$$

Из этого равенства следует, что

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]. \quad (1)$$

Аналогично рассуждая, используя формулы синуса суммы и разности двух углов, найдем $\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\beta\right)$. Для этого почленно вычтем равенства:

$$-\begin{array}{l}\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\\ \sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Получим равенство

$$\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\beta\right)=2\cos\alpha\sin\beta$$

Из этого равенства следует, что

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]. \quad (2)$$

Аналогично рассуждая, используя формулы косинуса суммы и разности двух углов, найдем $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$. Для этого почленно сложим равенства:

$$+\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Получим равенство

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$$

Из этого равенства следует, что

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]. \quad (3)$$

Аналогично рассуждая, используя формулы косинуса суммы и разности двух углов, найдем $\cos\left(\alpha+\beta\right)-\cos\left(\alpha-\beta\right)$. Для этого почленно вычтем равенства:

$$-\begin{array}{l}\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{array}$$

Получим равенство:

$$\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)=2\sin\alpha\sin\beta.$$

Из этого равенства следует, что

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]. \quad (4)$$

Пример: 1. Вычислим значение выражения $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$.

Решение. Используя формулу (3), получим $\cos 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\left[\cos\left(75^\circ + 15^\circ\right) + \right.$

$\left. + \cos\left(75^\circ - 15^\circ\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\cos 90^\circ + \cos 60^\circ\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример: 2. Преобразуем в сумму произведение $\sin 3\alpha \sin 7\alpha \cos 4\alpha$.

Решение. Используя формулу (4) для первых двух множителей, получим

$$\sin 3\alpha \sin 7\alpha \cos 4\alpha = \frac{1}{2}\left[\cos\left(3\alpha - 7\alpha\right) - \right.$$

$$\left. - \cos\left(3\alpha + 7\alpha\right)\right]\cos 4\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos 4\alpha - \cos 10\alpha\right) \times$$

$$\times\cos 4\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos^2 4\alpha - \cos 10\alpha \cos 4\alpha\right).$$

Далее, используя формулу (3), получим

$$\frac{1}{2}\left(\cos^2 4\alpha - \cos 10\alpha \cos 4\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2 4\alpha - \frac{1}{2}\cos 14\alpha - \frac{1}{2}\cos 6\alpha\right).$$

Раскрыв скобки, получим

$$\frac{1}{2}\cos^2 4\alpha - \frac{1}{2}\cos 14\alpha - \frac{1}{2}\cos 6\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\cos^2 4\alpha - \frac{1}{2}\cos 14\alpha - \frac{1}{2}\cos 6\alpha.$

?

1. Для каких углов можно использовать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму?

2. Почему формулу $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$ относят к формулам преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, а не в разность?

А

17.1. Запишите в виде суммы тригонометрических функций выражение:

1) $\sin 5\alpha \cdot \cos 2\alpha$;

2) $\sin 8\alpha \cdot \cos 12\alpha$;

3) $\cos 5\alpha \cdot \cos 7\alpha$;

4) $\cos 6\alpha \cdot \cos(-15\alpha)$;

5) $\sin 6\alpha \cdot \sin 14\alpha$;

6) $\sin 3\alpha \cdot \sin(-21\alpha)$;

7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) \cdot \cos 3\alpha$;

8) $\sin(\pi + 5\alpha) \cdot \cos(3\pi - 3\alpha)$;

9) $\cos 7\alpha \cdot \cos(2\pi + 9\alpha)$.

17.2. Представьте в виде суммы или разности выражение:

1) $2\sin 27^\circ \cos 9^\circ$;

2) $-2\sin 25^\circ \sin 15^\circ$;

3) $2\sin\alpha \cos 3\alpha$;

4) $2\cos 2\alpha \cos\alpha$;

5) $\cos(x+1)\cos(x-1)$;

6) $2\sin(a+b)\cos(a-b)$;

7) $\sin(m+n)\sin(m-n)$;

8) $\sin(2x+3)\sin(x-3)$;

9) $\sin(1-x)\cdot\cos(1-2x)$.

17.3. Вычислите:

1) $2\sin 22^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$;

2) $2\cos 7^\circ 30' \cdot \sin 52^\circ 30'$;

3) $\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

17.4. Докажите справедливость равенства:

1) $\cos 75°\cdot\sin 345° = -0{,}25$;

2) $\sin 105°\cdot\sin 295° = 0{,}25$.

17.5. Найдите значение выражения:

1) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}$ и $\cos\alpha\cos\beta = -\frac{1}{2}$;

2) $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}$; и $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}$;

3) $\sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$; и

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$;

4) $3\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}$ и

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$.

17.6. Упростите выражение:

1) $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $2\sin\left(\beta+\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)$.

17.7. Докажите справедливость равенства:

1) $4\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{3}+2\cos\alpha$;

2) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sqrt{2}\sin\alpha;$

3) $\cos^2(45^\circ-x)-\cos^2(60^\circ+x)-$

$-\cos75^\circ\sin(75^\circ-2x)=\sin2x;$

4) $\sin^2(45^\circ+x)-\sin^2(30^\circ-x)-\cos75^\circ\cdot$

$\cdot\cos(15^\circ+2x)=\sin2x.$

17.8. Верно ли равенство:

1) $\cos100^\circ\cos110^\circ+\cos20^\circ\cos10^\circ=$

$=\cos10^\circ;$

2) $2\cos47^\circ\cos73^\circ-\sin64^\circ=-0{,}5?$

B

17.9. Запишите в виде суммы выражение:

1) $8\cos\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos4\beta;$

2) $\cos3\beta\cdot\cos5\beta\cdot\cos8\beta;$

3) $4\sin\beta\cdot\sin 4\beta\cdot\cos 5\beta$;

4) $2\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 6\alpha$;

5) $\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha\cdot\sin 6\alpha$;

6) $16\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin 10\alpha$.

17.10. Найдите значение выражения:

1) $\cos 8\alpha+\cos 6\alpha+2\sin 5\alpha\cdot\sin 3\alpha$,

если $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\cos 12\alpha-\cos 6\alpha-2\sin 5\alpha\cdot\sin 7\alpha$,

если $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin 2\alpha\cos 5\alpha-\sin\alpha\cos 6\alpha$,

если $\sin\alpha=a$;

4) $\cos 7\alpha\cos 4\alpha-\cos 8\alpha\cos 3\alpha$,

если $\cos\alpha=a$.

17.11. Докажите, что верно равенство:

1) $\cos 75° \cdot \cos 15° = \frac{1}{4}$;

2) $\sin 105° \cdot \sin 75° = \frac{1}{4}$;

3) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = 1-4\sin^2\alpha$;

4) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right) = 3-4\cos^2\beta$.

17.12. Найдите значение выражения:

1) $\cos 6x + \cos 8x + 2\sin 3x \cdot \sin 5x$,

если $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\cos 12x - \cos 6x - 2\cos 7x \cdot \cos 5x$,

если $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17.13. Докажите тождество:

1) $\sin^2 2x - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$;

2) $1 + 2\cos 2x - 4\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$.

17.14. Найдите значение тригонометрического выражения:

1) $\sin 15^\circ \cos 7^\circ - \cos 11^\circ \cos 79^\circ - \sin 4^\circ \sin 86^\circ$;

2) $\cos 17^\circ \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cos 21^\circ -$

$- \cos 4^\circ \cos 86^\circ$.

17.15. Упростите выражение:

1) $\sin 5x \cdot \sin 4x + \sin 4x \cdot \sin 3x - \sin 2x \cdot$

$\cdot \sin x - 2\sin 3x \sin 5x \cdot \cos x$;

2) $1 + tg 3x - tg(60^\circ + x) \cdot tg x$.

17.16. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin 5\alpha - 2\sin 3\alpha \cos 3\alpha}{1 - \cos 5\alpha - 2\sin^2 3\alpha} = ctg 5{,}5\alpha;$

2) $\dfrac{2\cos^2 2\beta - \cos 5\beta - 1}{\sin 5\beta + 2\cos 2\beta \sin 2\beta} = ctg 4{,}5\beta;$

3) $\dfrac{\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha}{2(\cos \alpha + \cos 3\alpha)} = \cos \alpha \cdot tg 2\alpha;$

4) $\dfrac{2\cos \beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta}{\cos 3\beta + \sin \beta \sin 2\beta} = 4\cos 2\beta.$

С

17.17. Преобразуйте в сумму тригонометрических функций произведение:

1) $4\sin 5^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 25^\circ;$

2) $4\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ.$

17.18. Докажите тождество:

1) $4\cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha \cdot \cos 6\alpha = \cos 8\alpha + \cos 4\alpha + 2\cos 5\alpha \cdot \cos 3\alpha$;

2) $8\sin^3\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin\alpha - 0{,}5\sin^3\alpha$.

17.19. Вычислите:

1) $\cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ$;

2) $\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ$.

17.20. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x}{y} - \dfrac{y}{x} = -2, \\ x^2 - y^2 = -8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

17.21. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{\dfrac{x^3-3x^2-10x}{x+4}}$;

2) $y=\sqrt{\dfrac{-x^3+4x^2+12x}{x-1}}$;

3) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x-10}{x+4}}+\sqrt{2x+5}$;

4) $y=\sqrt{\dfrac{-x^2+2x+15}{x+7}}-\dfrac{2}{5-x}$.

17.22. Найдите значение выражения:

1) $1+\sin^2 68^\circ-\sin^2 38^\circ-0{,}5\sin 106^\circ$;

2) $\sin^2 35^\circ+\sin^2 25^\circ+0{,}5\cos 10^\circ-3$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

17.23. Упростите выражение:

1) $2-\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{1-8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

2) $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{tg2\alpha-1}$.

17.24. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha+\sin4\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha+\cos4\alpha+\cos7\alpha}=tg4\alpha$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=tg\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha-2\cos4\alpha-\sin7\alpha}{\cos\alpha+2\sin4\alpha-\cos7\alpha}=-ctg4\alpha$;

4) $\dfrac{\sin9\alpha+\sin8\alpha-\sin7\alpha-\sin6\alpha}{\cos6\alpha+\cos7\alpha+\cos8\alpha+\cos9\alpha}=tg\alpha$.

§ 18. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Вы научитесь выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Рассмотрим преобразования тригонометрических выражений на примерах.

Пример: 1. Докажем тождество

$$\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x}=2\sin x.$$

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ и формулами двойного угла: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ и $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Далее в знаменателе применим формулу приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\cdot$

Тогда получим: $\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sin x}=$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\cos x+\sin x}=$$

$$=\frac{2\sin x(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}2\sin x.$$

Пример: 2. Выразим дробь $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ через $tg\alpha$.

Решение. Разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя дроби на $\cos\neq 0$.

Тогда

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{tg\alpha+1}{tg\alpha-1};$$

Ответ: $\dfrac{tg\alpha+1}{tg\alpha-1}$.

Пример: 3. Докажем тождество

$$\frac{\sin 22^\circ + \sin 8^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 12^\circ - \sin 2^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 80^\circ}.$$

Доказательство. Упростим левую часть равенства. Для этого используем формулы суммы синусов и двойного угла для синуса.

Тогда

$$\frac{\sin 22^\circ + \sin 8^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sin 15^\circ \cos 7^\circ}{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 7^\circ}{\cos 15^\circ}.$$

Теперь упростим правую часть равенства. Для этого используем формулы разности синусов и разности косинусов.

$$\frac{\sin 12^\circ - \sin 2^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 80^\circ} = \frac{2\sin 5^\circ \cos 7^\circ}{-2\sin 75^\circ \sin(-5^\circ)} =$$

$= \dfrac{2\sin 5^\circ \cos 7^\circ}{2\cos 15^\circ \sin 5^\circ} = \dfrac{\cos 7^\circ}{\cos 15^\circ}$. После преобразования правой и левой частей тождества

$\dfrac{\sin 22^\circ + \sin 8^\circ}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sin 12^\circ - \sin 2^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 80^\circ}$ получили одинаковое выражение $\frac{\cos 7^\circ}{\cos 15^\circ}$. Следовательно, $\frac{\sin 22^\circ + \sin 8^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 12^\circ - \sin 2^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 80^\circ}$.

Пример: 4. Докажем тождество $-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1$.

Доказательство. Выполним преобразование правой части равенства. Для этого к ней прибавим и вычтем одно и то же выражение $2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. Получим

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha -$$

$$-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = (\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha +$$

$$+\cos^4\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = (\sin^2\alpha +$$

$$+\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = 1 -$$

$-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, что и требовалось доказать.

В некоторых случаях для доказательства тождества приходится выполнить преобразования обеих его частей и получить одно и то же выражение.

Мысал: 5. Докажем тождество
$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)+1=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$.

Доказательство. Сначала преобразуем выражение, стоящее в левой части:

$$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)+1=2\left[(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3\right]+$$

$$+1=2\left[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)\right]+1=2\left[1\cdot(\sin^4\alpha-\right.$$

$$-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+$$

$$\left.+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\right]+1=2\left[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-\right.$$

$$\left.-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\right]+1=2(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)+$$

$$+1=2-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1=3-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Теперь преобразуем выражение, стоящее в правой части:

$$3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=3\Big[(\sin^2\alpha)^2+(\cos^2\alpha)^2+$$

$$+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Big]=$$

$$3\Big[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Big]=$$

$$=3(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=3-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Таким образом, преобразовав обе части равенства, получили одно и то же выражение: $3-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ что и требовалось доказать.

В отдельных случаях при доказательстве тождеств используют различные правила, свойства и т. п.

Пример: 6. Докажем тождество $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

Доказательство. Если это равенство рассматривать как пропорцию, то можно воспользоваться свойством: равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ является пропорцией тогда и только тогда, когда произведение ее крайних членов ad равно произведению ее средних членов bc. Вместо данного тождества докажем тождество: $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=$ $=\cos\alpha\cdot\cos\alpha$. Преобразуем его левую часть, получим $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-$ $1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$.

Преобразуем правую часть, получим $\cos\alpha\cdot\cos\alpha=\cos^2\alpha$.

Примечание. При доказательстве тождеств, содержащих дробные выражения, надо обязательно учитывать допустимые значения переменной.

Таким образом, в последнем 6-м примере — $\cos\alpha\neq 0$ и $\sin\alpha\neq -1$.

1. Преобразование каких частей тождества можно выполнять для его доказательства?

A

18.1. Упростите тригонометрическое выражение:

1) $\cos\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $8tg945^\circ+tg(810^\circ+\alpha)-ctg(450^\circ-\alpha)$;

3) $\sin(2\alpha-\pi)+2\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\sin(\alpha+\pi)+tg(\alpha-\pi)$;

5) $\sin(23\pi+2018)+\cos\left(\frac{31\pi}{2}+2018\right)$;

6) $\sin\left(\frac{35\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(68\pi-\alpha)$.

18.2. 1) $tg(9\pi-\alpha)+ctg\left(\frac{57\pi}{2}+\alpha\right)$;

2) $$\frac{tg\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\alpha-4\pi)}{ctg(5\pi-\alpha)\sin\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)};$$

3) $$\sin(7\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{15\pi}{2}+\beta\right)-$$

$$-\sin\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(6\pi-\beta);$$

4) $$\frac{\sin(4\pi-\alpha)\,tg\left(\frac{25\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)ctg(17\pi-\alpha)};$$

5) $$tg^2(540^\circ-\alpha)\left(\frac{1}{\cos^2(360^\circ+\alpha)}-1\right);$$

6) $$tg(13\pi-\alpha)\cdot tg\left(\frac{13\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\alpha-22\pi).$$

Найдите значение выражения, предварительно преобразовав его (18.3–18.5):

18.3. 1) $\sin 7^\circ \cos 23^\circ + \sin 23^\circ \cos 7^\circ + 1$;

2) $\dfrac{4\sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$;

3) $\dfrac{tg 22^\circ + tg 23^\circ}{1 - tg 22^\circ tg 23^\circ}$;

4) $\sin 64^\circ \cos 26^\circ + \cos 64^\circ \sin 26^\circ - \sin 30^\circ$.

18.4.

1) $\dfrac{\cos 14^\circ + \sin 14^\circ + \cos 42^\circ + \sin 42^\circ}{\sqrt{2}\cos 14^\circ \sin 73^\circ}$;

2) $\dfrac{\sin 36^\circ \sin 40^\circ + \cos 62^\circ + \cos 42^\circ}{4\cos 6^\circ \cos 4^\circ \sin 38^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin 8^\circ - \sin 10^\circ - \sin 12^\circ + \sin 14^\circ}{4\sin 11^\circ \cos 1^\circ \sin^2 1^\circ}$;

4) $\dfrac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ + \sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{4\sqrt{2}\cos 5^\circ \sin 55^\circ}$.

18.5. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\dfrac{3\cos 215^\circ - 4\cos 35^\circ - 2\sin 125^\circ}{\cos 17^\circ \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cos 72^\circ}$;

2) $\dfrac{5\sin 211^\circ + 8\cos 59^\circ - 5\sin 31^\circ}{\sin 54^\circ \sin 67^\circ - \sin 36^\circ \sin 23^\circ}$;

3) $\dfrac{7\cos 29^\circ - 2\cos 151^\circ + 4\sin 61^\circ}{\cos 67^\circ \cos 38^\circ + \cos 23^\circ \cos 52^\circ}$;

4) $\dfrac{2\sin 54^\circ + 3\cos 36^\circ - 2\cos 144^\circ}{\sin 70^\circ \sin 74^\circ - \sin 20^\circ \sin 16^\circ}$.

18.6. Проверьте справедливость равенства:

1) $\sin 93^\circ - \sin 63^\circ = \sin 33^\circ$;

2) $\cos 14^\circ - \sin 16^\circ = \cos 46^\circ$.

18.7. Вычислите:

1) $\dfrac{4\left(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ\right)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos 25^\circ - \sin 25^\circ\right)}{\sin 20^\circ}$;

3) $\dfrac{1-2\cos^2 13^\circ}{\cos 26^\circ}$;

4) $\dfrac{1-2\sin^2 46^\circ}{8\cos 92^\circ}$.

18.8. Вычислите:

1) $\dfrac{\sin\beta\cos\beta+2}{5\cos^2\beta+1}$, если $tg\beta=2$;

2) $\dfrac{\sin\beta\cos\beta-3}{6\cos^2\beta-\sin^2\beta}$, если $tg\beta=-2$;

3) $\dfrac{2\sin\beta\cos\beta+3}{4\cos^2\beta+\sin^2\beta}$, если $tg\beta=-4$;

4) $\dfrac{\cos^2\beta+2}{\cos^2\beta+3\sin\beta\cos\beta}$, если $tg\beta=3$.

B

18.9. Найдите значение тригонометрического выражения:

1) $\dfrac{\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$,

если $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$;

2) $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

4) $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

18.10. Вычислите:

1) $tg 1^\circ \cdot tg 5^\circ \cdot tg 9^\circ \cdot \ldots \cdot tg 85^\circ \cdot tg 89^\circ$;

2) $ctg 2^\circ \cdot ctg 8^\circ \cdot ctg 14^\circ \cdot \ldots \cdot tcg 82^\circ \cdot ctg 88^\circ$.

18.11. Вычислите:

1) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$, если $\sin x=0,21$;

2) tgx, если $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{0,4}$;

3) $\cos x$, если $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\sqrt{0,5}$;

4) $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$, если $\sin x=-0,44$;

5) $\sin x$, если $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,6$;

6) $\sqrt{10}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$, если $\cos x=0,8$.

18.12. Вычислите:

1) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$;

2) $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+$

$+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$.

18.13. Найдите значение выражения:

1) $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$; $\alpha+\beta=\frac{9\pi}{2}$;

2) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta=-\frac{1}{4}$; $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}$;

3) $5\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$; $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$;

4) $4\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$; $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{6}$.

18.14. Вычислите:

1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0,8$;

3) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 1,2$;

4) $\dfrac{1}{\sin^4\alpha} + \dfrac{1}{\cos^4\alpha}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt{2}\dfrac{1}{\sin^3\alpha} + \dfrac{1}{\cos^3\alpha}$, если

$\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

6) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

18.15. Найдите значение тригонометрической функции:

1) $tg\alpha$, если $2tg\alpha - \sin\alpha + 5\cos\alpha = 10$;

2) $ctg\alpha$, если $3tg\alpha + 4\sin\alpha - \cos\alpha = 12$;

3) $ctg\alpha$, если $2tg\alpha - \sin\alpha + 10\cos\alpha = 20$;

4) $tg\alpha$, если $3ctg\alpha - 0{,}1\sin\alpha - \cos\alpha = -0{,}3$.

18.16. Упростите выражение:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

3) $\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$;

4) $\sin^2\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\beta + \frac{7\pi}{12}\right)$.

18.17. Докажите, что верно равенство:

$$tg30^\circ + tg40^\circ + tg50^\circ + tg60^\circ = \frac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}.$$

C

18.18. Докажите тождество:

1) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha =$

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

2) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha =$

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

18.19. Найдите значение выражения $\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}$, если известно, что $4\sin^2\alpha - 9\cos\alpha - 6 = 0$.

18.20. Сократите дробь:

$$\frac{4\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha}{4\cos^2\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2(2\alpha - 2\pi)}.$$

18.21. Упростите выражение:

1) $0{,}125\cos 4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\sin^2\beta\, tg\beta - \cos^2\beta\, ctg\beta + 2ctg 2\beta$;

3) $\dfrac{1}{tg^2\alpha} - \dfrac{2\cos 2\alpha}{1 + \sin(2\alpha + 1{,}5\pi)}$;

4) $\dfrac{1}{1 - tg\beta} - \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\sin\beta}{\cos 2\beta}$.

18.22. Докажите тождество:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x =$$
$$= 4\cos x\cos 2x\sin 4x.$$

18.23. Найдите множество значений выражения:

1) $tgx\cos x + ctgx\sin x$;

2) $tgx\cos x - ctgx\sin x$.

18.24. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4}\cdot\dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x} = tgx$;

2) $\dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\sin^3 x + \sin 3x} = tgx$;

3) $\sin 4x + \cos 4xctg2x = \dfrac{1-tg^2x}{2tgx}$;

4) $4\sin x\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \sin 3x$.

18.25. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1+\cos 2\beta}{3+2\sin 2\beta}$, если $tg\beta = 2$;

2) $\dfrac{3\sin 4\beta}{1+4\cos 2\beta}$, если $tg\beta = -3$.

18.26. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

$$\frac{2\cos^2\alpha + \cos 4\alpha - 1}{\cos^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\alpha}{2}}.$$

18.27. Найдите значение суммы:

1) $\sin\dfrac{\pi}{6} + \sin^2\dfrac{\pi}{6} + \sin^3\dfrac{\pi}{6} + \ldots + \sin^n\dfrac{\pi}{6} + \ldots;$

2) $ctg\dfrac{\pi}{3} + ctg^2\dfrac{\pi}{3} + ctg^3\dfrac{\pi}{3} + \ldots + ctg^n\dfrac{\pi}{3} + \ldots$.

18.28. Найдите значение выражения:

1) $1 + \dfrac{P_{10}}{P_9} - \dfrac{P_7}{P_6};$ 2) $\dfrac{P_7}{P_9} \cdot A_9^3 + 2;$

3) $\dfrac{4P_7}{P_{10}} \cdot A_{10}^2 + 0,5;$ 4) $\dfrac{A_6^4}{P_3} : C_6^5.$

18.29. Найдите количество четных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 0, при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды.

18.30. Решите уравнение:

1) $A_x^2 = 7x;$ 2) $A_x^2 = 5x + 24.$

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18.31. Найдите число способов покупки 1 кг груш и 1 кг мандаринов, если в магазине имеется 5 сортов груш и 4 сорта мандаринов.

18.32. В двух ящиках было 120 яблок. Три яблока переложили из первого ящика во второй. В результате количество яблок во втором ящике стало в два раза больше, чем в первом. Сколько яблок было в первом ящике первоначально?

Проверь себя!

1. Отношение ординаты точки на окружности к ее абсциссе называется:

A) синусом угла;
B) косинусом угла;
C) тангенсом угла;
D) котангенсом угла.

2. В какой четверти расположен угол в 75°?

A) I;
B) II;
C) III;
D) IV.

3. Найдите значение $\cos 30^\circ$.

A) $\frac{1}{2}$;
B) 1;
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Поворотом на какой угол радиус займет такое же положение, что и при повороте на угол $80°$:

A) $180°$; C) $380°$;
B) $440°$; D) $120°$.

5. Найдите значение выражения $4\cos 90° - 8\sin 60°$:

A) $-4\sqrt{3}$; C) 0;
B) $4 - 4\sqrt{3}$; D) -4.

6. Среди чисел найдите число, которое меньше нуля:

A) $\sin 140°$; C) $\sin 50°$;
B) $\cos 140°$; D) $\cos 50°$.

7. Найдите значение $\cos(-30°)$:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

8. Углом какой четверти является угол α, если $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$:

A) I; C) III;
B) II; D) IV?

9. Найдите значение $\sin 390°$:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$;

B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

10. Какое из выражений не имеет смысла:

A) $\cos 0°$; C) $ctg 0°$;

B) $tg 0°$; D) $ctg 90°$?

11. Выразите в радианах угол $\frac{3\pi}{4}$:

A) $30°$; B) $135°$; C) $\frac{3}{4}$; D) $45°$.

12. Выразите в радианах угол $200°$:

A) $\frac{7\pi}{9}$; B) $\frac{10\pi}{9}$; C) 200π; D) 2π.

13. В какой четверти расположен угол $\frac{10\pi}{9}$?

A) I; C) III;
B) II; D) IV.

14. Упростите $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$:

A) $\sin\alpha$; C) $-\sin\alpha$;

B) $\cos\alpha$; D) $-\cos\alpha$.

15. Замените тригонометрической функцией угла α выражение $tg(180° - \alpha)$:

A) $tg\alpha$; C) $-tg\alpha$;

B) $ctg\alpha$; D) $-ctg\alpha$.

16. Найдите значение $\cos\frac{7\pi}{6}$:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$;

B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

17. Найдите значение $\cos 150^\circ$:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$;

B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{1}{2}$.

18. Упростите выражение $\cos^2(360^\circ - x) +$ $+ \cos^2(270^\circ + x)$:

A) $\frac{1}{2}$; B) –1; C) 1; D) 0.

19. Найдите $tg2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}(0 <$ $< \alpha < \frac{\pi}{2})$:

A) $-\frac{24}{7}$; C) $-\frac{24}{25}$; E) $\frac{25}{7}$.

B) $\frac{24}{7}$; D) $\frac{24}{25}$;

20. Найдите $ctg2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}(\pi <$ $< \alpha < \frac{3\pi}{2})$:

A) $\frac{7}{24}$; C) $\frac{25}{24}$; E) $\frac{25}{7}$.

B) $\frac{24}{7}$; D) $\frac{24}{25}$;

Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 19. Событие и его виды

Вы познакомитесь с понятиями: событие, случайное событие, достоверное событие, невозможное событие, благоприятствующие исходы, равновозможные и противоположные события; научитесь различать элементарное событие от неэлементарного.

Под **событием** понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит (имеет место) или не происходит.

Пример: 1. 1) «Утром пойдет дождь»;

2) «девятиклассники изучают алгебру»;

3) «на елке вырастут яблоки»;

4) «при телефонном вызове абонент окажется занят»;

5) «число вызовов по телефонной связи в каждый момент времени»;

6) «попадание в цель при стрельбе из оружия».

Событиями являются и результаты различных опытов, наблюдений и измерений.

Пример: 2. 1) «Выпал герб (в опыте подбрасывания монеты)»;

2) «выпала решка (в опыте подбрасывания монеты)».

Испытание, или **опыт** — это комплекс условий, в которых могут осуществиться или не осуществиться рассматриваемые события (результаты).

При многократном повторении комплекса условий говорят о **серии испытаний**.

Для обозначения событий используют символы: A, B, C и т. д.

События делят на **достоверные, случайные и невозможные.**

События

Достоверные	Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в данном испытании
Случайные	Событие называется **случайным**, если оно может произойти, но может и не произойти
Невозможные	Событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в данном испытании, т. е. свершение которого при данных условиях исключается

Пример: 3. Примером случайного события является событие:

1) «выпадение герба», связанного с опытом подбрасывания монеты, в одних случаях, которое может произойти, в других — может и не произойти;

2) «утром пойдет дождь», связанного с состоянием погоды, в одних случаях, которое может произойти, в других — может и не произойти.

Примером достоверного события является событие:

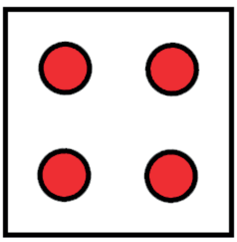
1) «девятиклассники изучают алгебру»;

2) «за осенью наступит зима».

Примером невозможного события является событие:

1) «при подбрасывании монеты достоинством 5 тг выпадет 2 тг»;

2) «за июнем сразу наступит январь».



В результате опыта могут произойти различные случайные события. Случайное событие «при бросании игральной кости выпала четверка» является элементарным событием — его нельзя разделить на более простые. Событие «при бросании игральной кости выпало нечетное число очков» не является элементарным событием — его можно разделить на более простые: «при бросании игральной кости выпало одно очко», «при бросании игральной кости выпало три очка», «при бросании игральной кости выпало пять очков».

События, которые нельзя разделить на более простые события, называются **элементарными событиями**.

Исход опыта, в котором наблюдается интересующее нас событие, называется **благоприятствующим исходом**.

Пример: 4. В классе 25 учащихся. Из них 17 мальчиков. Рассмотрим событие А: «наугад выбранный учащийся является мальчиком». Число благоприятствующих событию А исходов равно 17.

Если из некоторого множества отбирается один элемент и при этом никакому элементу множества не отдается предпочтения по сравнению с другими, то говорят, что каждому элементу множества обеспечена равная возможность быть отобранной (принцип равновозможности). Такие события называют **равновозможными событиями**.

Равновозможными исходами называются исходы опыта, которые имеют одинаковые шансы наступления.

Пример: 5. Так, являются равновозможными события:

A: «при бросании игральной кости выпала цифра 1»;

B: «при бросании игральной кости выпала цифра 2»;

C: «при бросании игральной кости выпала цифра 3»;

D: «при бросании игральной кости выпала цифра 4»;

E: «при бросании игральной кости выпала цифра 5»;

F: «при бросании игральной кости выпала цифра 6».

Событием, противоположным событию A, называется событие $\bar{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

Пример: 6. Парами противоположных событий являются:

«попадание при выстреле» и «промах при выстреле»;

«безотказная работа всех элементов системы» и «отказ работы хотя бы одного элемента системы»;

«выпал герб при бросании монеты» и «выпала решка при бросании монеты».

Событием, противоположным событию «вынули синий шар» в опыте, когда вынимают один шар из ящика с зелеными, желтыми и синими шарами, является «вынули шар хотя бы один: желтый или зеленый».

Достоверное событие обозначают буквой U.

Невозможное событие обозначают буквой V.

$$\overline{U} = V, \ \overline{V} = U.$$

?

1. Приведите примеры случайных событий.
2. Являются ли события «выпал герб при бросании монеты» и «выпала решка при бросании монеты» равновозможными?
3. Почему событие «при бросании игральной кости выпало четное число очков» не является элементарным?
4. Назовите событие, которое противоположно событию «при бросании игральной кости выпало четное число очков».

A

19.1. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — из списка журнала учащихся 9 класса (в котором есть девочки и мальчики) случайным образом выбран один учащийся:

1) это мальчик;

2) выбранному учащемуся 14 лет;

3) выбранному учащемуся 14 месяцев;

4) этому ученику больше 5 лет?

19.2. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — сегодня в городе барометр показывает нормальное атмосферное давление, при этом:

1) вода в чайнике закипела при температуре 70°C;

2) когда температура упала до –9°C, то вода в луже замерзла?

19.3. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие: «Измерены длины сторон треугольника: оказалось, что длина каждой стороны меньше значения суммы длин двух других сторон»?

19.4. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — бросают две игральные кости:

1) на первой кости выпало 2 очка, на второй — 5 очков;

2) сумма выпавших на двух костях очков равна 1;

3) сумма выпавших на двух костях очков равна 13;

4) сумма выпавших на двух костях очков меньше 14?

19.5. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — случайным образом открывается учебник казахского языка и находится второе слово на левой странице. Это слово начинается с буквы:

1) «Ә» или «Ң»;

2) «Ъ»?

19.6. Приведите пять примеров противоположных событий.

B

19.7. Является ли элементарным данное событие? Если нет, то разделите его на простые события:

1) событие A: «случайным образом составленное квадратное уравнение имеет действительные корни»;

2) событие B: «дискриминант квадратного уравнения отрицателен».

19.8. Являются ли равновозможными событие A и событие B, если событие A заключается в том, что случайным образом выбранная функция $y = f(x)$ на множестве R монотонно возрастает; событие B заключается в том, что $f(56) < f(57)$?

19.9. Перечислите все равновозможные события, которые могут произойти в результате подбрасывания:

1) одной монеты;

2) игрального кубика;
3) двух монет.

19.10. Укажите события, противоположные событию:
1) моего соседа по парте зовут не Алибек и не Азамат;
2) явка на выборы была от 82% до 93%;
3) на контрольной работе по математике я не выполнил, как минимум, два задания из пяти.

19.11. Назовите событие, противоположное событию в данном испытании:
1) при бросании монеты выпала решка;
2) при бросании игральной кости выпало 4 очка;
3) из корзины, в которой лежат 3 белых и 6 красных шаров, случайным образом вынут красный шар;
4) при бросании игральной кости выпало меньше 4-х очков;
5) случайно выбранная цифра меньше 7;
6) из 5 выстрелов по мишени хотя бы одна пуля попала в цель.

C

19.12. При бросании игральной кости выпало нечетное число очков. Является ли это событие элементарным? Разделите это событие на простые события.

19.13. Из перечисленных событий назовите равновозможные:

1) при бросании игрального кубика выпало 2 очка;

2) при бросании игрального кубика выпало 4 очка;

3) при бросании игрального кубика выпало 6 очков;

4) при вынимании из колоды карт одной карты был вынут туз;

5) при вынимании из колоды карт одной карты был вынут валет.

П

19.14. Выполните:

1) $\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

2) $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{a+\sqrt{x}}\right):\dfrac{a}{a^2-x}$.

19.15. Решите методом интервалов неравенство:

1) $\dfrac{x}{x+1}\le\dfrac{2}{x-1}$; 2) $\dfrac{2x}{x+2}-1\ge\dfrac{2}{x-2}$.

19.16. 1) На сколько процентов увеличится значение произведения двух чисел, если одно из них увеличить на 30%, другое — на 20%?

2) На сколько процентов уменьшится значение произведения двух чисел,

если одно из них уменьшить на 25%, другое — на 40%?

3) На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель уменьшить на 40%, знаменатель — на 20%?

4) На сколько процентов уменьшится значение произведения двух чисел, если одно из них уменьшить на 50%, другое увеличить на 20%?

19.17. На диаграмме (рис. 48) показано количество цветов в цветочном магазине. Сколько гвоздик в магазине, если всего цветов 900 штук и гвоздик в целое число раз больше, чем астр?

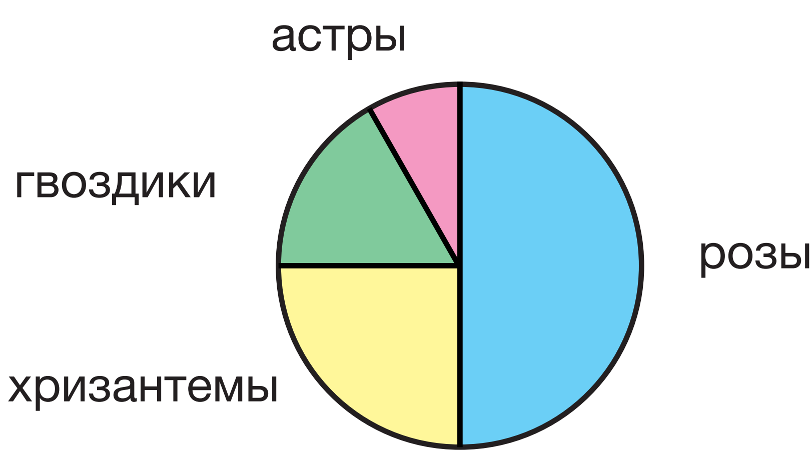


Рис. 48

19.18. Известно, что график функции $y = x^2 - ax + 4$ проходит через точку $M(-1;\ 3)$. Постройте график этой функции и найдите наименьшее значение функции.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

19.19. Если бросается игральная кость, то какие элементарные события соответствуют тому, что выпавшее число очков: 1) четное; 2) нечетное; 3) больше 3?

19.20. Составьте несколько правильных обыкновенных дробей, если числа, стоящие в числителе этой дроби, выбираются из множества натуральных чисел, принадлежащих интервалу (2; 6), а числа, стоящие в знаменателе, — из множества натуральных чисел, принадлежащих интервалу (5; 8).

§ 20. Определение классической вероятности. Статистическая вероятность

Вы познакомитесь с классическим определением вероятности и статистическим определением вероятности; научитесь применять классическое определение вероятности и статистическое определение вероятности для решения задач.

Предвидеть события в массовых явлениях позволяет такой раздел математики, как теория вероятностей. Она применяется при анализе различных процессов и явлений, изучает количественные закономерности, которым подчиняются однородные массовые события.

Для практической деятельности надо уметь сравнивать события по степени возможности их наступления. Например, в реке плавают щуки и караси. Очевидно, что события «поймали щуку» и «поймали карася» обладают разной степенью возможности их наступления, поэтому для их сравнения нужна определенная количественная мера.

Количественной мерой возможности наступления события является **вероятность**. Наиболее широкое распространение получили два определения вероятности события: **классическое** и **статистическое**.

Классическое определение вероятности применимо только для тех событий, которые равновозможны.

> **Вероятностью события** A называется отношение числа $\boldsymbol{m}$, благоприятствующих этому событию исходов, к общему числу исходов $\boldsymbol{n}$, если они равновозможные.

Вероятность событий обозначается большой латинской буквой P (от французского слова probabilite, что означает «возможность», «вероятность»).

Вероятность события A обозначается: $P(A)$.

Вероятность события A вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$, где $\boldsymbol{m}$ — число исходов, благоприятствующих этому событию A, $\boldsymbol{n}$ — общее число равновозможных исходов.

Пример: 1. Вероятность события A — «выпадет «орел» и события B — «выпадет «решка» можно записать так: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,5$, или $P(A) = 50\%$, $P(B) = 50\%$.

Объясните

Почему вероятность события A заключена между нулем и единицей: $0 \le P(A) \le 1$?

Пример: 2. Найдем вероятность события X — «число выброшенных очков на игральной кости является простым числом».

Решение: Для нахождения вероятности события X воспользуемся формулой: $P(A)=\frac{m}{n}$, где $\boldsymbol{m}$ — число благоприятствующих исходов события A, $\boldsymbol{n}$ — общее число исходов.

Поскольку всего количество очков может быть только 1; 2; 3; 4; 5; 6, то $n = 6$. Простыми из чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6 являются три числа: 2; 3; 5, поэтому $m = 3$. Получим $P(X)=\frac{3}{6}=0,5.$

Ответ: 0,5.

Свойства вероятности

Свойство 1. Если все случаи являются благоприятствующими данному событию, то это событие обязательно произойдет. Рассматриваемое событие является **достоверным**, а вероятность его появления равна 1.

Свойство 2. Если нет ни одного случая, благоприятствующего данному событию, то это событие в результате опыта произойти не может. Рассматриваемое событие является **невозможным**, а вероятность его появления равна 0.

Свойство 3. Вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна 1.

Свойство 4. Вероятность наступления противоположного события данному определяется так же, как и вероятность наступления данного события. Вероятность наступления противоположного события равна значению разности между единицей и вероятностью наступления события.

Статистической вероятностью события A называется относительная частота (частотность) появления этого события в $\boldsymbol{n}$ произведенных испытаниях.

Статистическая вероятность события A вычисляется по формуле:

$P(A)=\omega(A)=\frac{m}{n}$ где $\omega(A)$ — относительная частота события A; $\boldsymbol{m}$ — число испытаний, в которых появилось событие A, $\boldsymbol{n}$ — общее число испытаний.

Пример: 3. Из 500 рожденных детей родилось 240 девочек. Найдите частоту рождения девочек.

Решение. $\omega(A)=\frac{240}{500}=0,48.$

Ответ: 0,48.

?

1. Может ли частота события быть:
1) отрицательным числом; 2) числом, которое больше 2?
2. Какова вероятность события:
1) достоверного; 2) невозможного; 3) равновозможного из двух?

A

20.1. При бросании игрального кубика выпадает одна из цифр от 1 до 6. Найдите вероятность события:

1) выпадет цифра 2;
2) выпадет цифра 1 или 2;
3) выпадет цифра 4 или 6;
4) выпадет нечетная цифра.

20.2. 1) В урне 2 белых и 5 красных шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:
а) белый; б) красный; в) зеленый.
2) В урне 4 красных и 7 синих шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:
а) красный; б) не белый; в) синий.

20.3. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости. Рассмотрим события A, B и C. Событие A: «выпавшее на верхней грани число очков делится на 12», B: «выпавшее на верхней грани число очков равно 2», C: «выпавшее на верхней грани число очков делится на 2». Объясните, какое утверждение верно, а какое нет:

1) $P(A) = 1$;

2) $P(A) = 0$;

3) $P(C) = 0,5$;

4) $P(\overline{B}) = \frac{5}{6}$;

5) $P(B) = \frac{1}{6}$.

20.4. 1) В классе 25 учащихся, из которых 5 учатся на отлично, 12 — на хорошо, 6 — на удовлетворительно и 2 — слабо. Какова вероятность того, что наугад вызванный к доске учащийся отличник или ударник?

2) Среди 25 экзаменационных билетов 5 «легких». Двое учащихся по очереди берут по одному билету. Какова вероятность того, что первый учащийся возьмет «легкий» билет?

20.5. Брошена игральная кость. Найдите вероятность выпадения:

1) трех или пяти очков;

2) пяти или шести очков;

3) семи очков.

B

20.6. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность того, что значение произведения очков равно 5.

20.7. 1) Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз появится герб?

2) Брошены три монеты. Какова вероятность того, что выпадут ровно два герба?

20.8. Для экзамена подготовлены билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый учащимся билет наугад имеет:

1) однозначный номер;
2) двузначный номер?

20.9. Случайным образом выбрали двузначное число. Найдите вероятность того, что оно:
1) оканчивается нулем;
2) состоит из одинаковых цифр;
3) больше 27, но меньше 46;
4) является квадратом целого числа.

20.10. Найдите частоту события, если:
1) на один из пяти приобретенных лотерейных билетов выпал выигрыш;
2) на четыре из 100 приобретенных лотерейных билетов выпал выигрыш;
3) из 20 выстрелов получилось шесть попаданий в мишень;
4) из 30 дней было 12 солнечных дней.

C

20.11. Произведено 160 выстрелов по мишени. Известно, что статистическая вероятность поражения мишени равна 0,3. Найдите число попаданий в мишень.

20.12. Дано выражение $\sqrt{n-10}$. Значение переменной ***n*** случайно выбирается среди натуральных чисел от 1 до 99. Найдите вероятность того, что значение выражения:

1) не определено;
2) меньше 10;
3) принадлежит отрезку [1; 6].

20.13. 1) Случайным образом выбирается натуральное число из интервала (–1; 6). Найдите вероятность того, что это число является корнем уравнения $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.

2) Случайным образом выбирается целое число из интервала (–2; 6). Найдите вероятность того, что это число является корнем уравнения $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

3) Случайным образом выбирается целое число из промежутка [–1; 10]. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x - 6 < 0$.

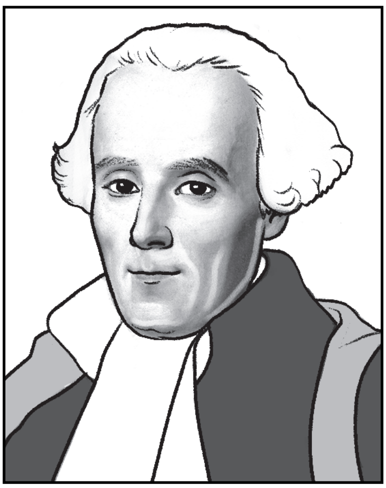
4) Случайным образом выбирается целое число из промежутка [–1; 10]. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x - 6 \le 0$.

20.14. Подготовьте сообщение из истории появления теории вероятностей.

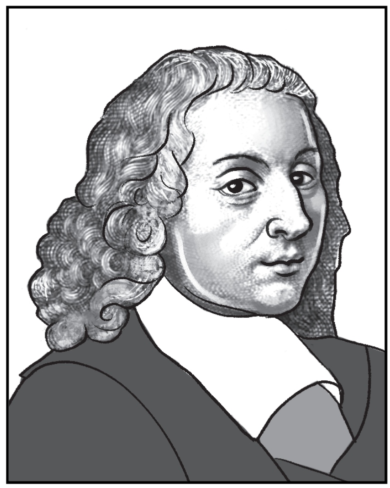
Подготовьте сообщение об ученых-математиках

О Пьере-Симоне Лапласе — одном из создателей теории вероятностей;

о Б. Паскале, в работах которого впервые отражены основные понятия теории вероятностей.



Пьер-Симон Лаплас (1749–1827)



Блез Паскаль (1623–1662)

П

20.15. Найдите значение тригонометрического выражения:

1) $\dfrac{tg30^\circ + \cos\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{\pi}{2} - 4ctg135^\circ}$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ + \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}}{5tg\dfrac{3\pi}{4} - 3ctg\dfrac{\pi}{4}}$.

20.16. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y - x^2 + 3x}{x^2 - 4} = 0$; 2) $\dfrac{y - \sqrt{x+2}}{x^2 - 1} = 0$.

20.17. Установите закономерность в последовательности чисел:

1) –1; 2; 7; 14; 23; … ;

2) 4; 7; 12; 19; 28; … .

20.18. 1) Простейшее животное инфузория-туфелька размножается делением на две части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 320?

2) Тело падает с башни высотой 62 м. В первую секунду пролетает 2 м, а в каждую следующую секунду летит в 2 раза быстрее, чем за предыдущую. Сколько секунд пройдет до удара тела о землю?

Математика в профессии повара

20.19. Сколько нужно взять молока 10%-ной жирности и пломбира 30%-ной жирности, чтобы получить 200 г 16%-го праздничного коктейля?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

20.20. 1) В равносторонний треугольник со стороной 6 см вписан круг. Найдите отношение площади круга к площади треугольника.

2) В квадрат со стороной 8 см вписан круг. Найдите отношение площади круга к площади квадрата.

20.21. Найдите длину интервала, числа из которого являются решением неравенства:

1) $x^2 + 2x - 8 < 0$;
2) $x^2 - 3x - 10 < 0$;
3) $x^2 - 6x - 2 < 0$;
4) $x^2 + 12x - 4 < 0$.

§ 21. Геометрическая вероятность

Вы научитесь применять геометрическую вероятность при решении задач.

Кроме классического и статистического определения вероятности в практике используется и геометрическая вероятность. Вы знаете, что классическое определение вероятности применимо только тогда, когда исходы равновозможны. При этом предполагается, что число исходов конечно. Применение статистического определения вероятности требует проведения испытаний. В случаях, если число возможных исходов бесконечно, используют геометрические вероятности.

Геометрические вероятности — вероятности попадания точки в часть отрезка, плоскости, пространственной фигуры.

Пример: 1. Пусть на плоскости задана некоторая геометрическая фигура D и геометрическая фигура E, являющаяся частью фигуры D (рис. 49).

В результате испытания случайно выбирается точка, принадлежащая фигуре D. Надо найти вероятность того, что эта точка окажется принадлежащей фигуре E.

Решение. Выбранная точка может быть из любой области фигуры D, но вероятность выбора точки из области фигуры E прямо пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее формы и расположения в фигуре D.

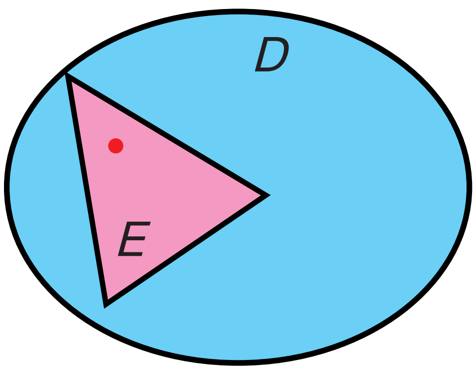


Рис. 49

Тогда вероятность события A — выбранная точка окажется из области фигуры E и находится по формуле $P(A)=\frac{S(E)}{S(D)}$, где $S(E)$ — площадь фигуры E, $S(D)$ — площадь фигуры D.

Вероятность события A — выбранная точка окажется из области фигуры E, которая находится по формуле: $P(A)=\frac{S(E)}{S(D)}$, где $S(E)$ — площадь геометрической фигуры E, $S(D)$ — площадь геометрической фигуры D, а фигура E полностью вмещается в фигуру D и является **геометрической вероятностью**.

Пусть плоская фигура площадью S_1 включается в плоскую фигуру площадью S_2. Вероятность события А «наудачу брошенная точка попала на плоскую фигуру площадью S_1» определяется равенством:

$$P(A)=\frac{S_1}{S_2}.$$

Пример: 2. В квадрат, длина стороны которого равна 4 см, вписан круг радиусом 2 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в квадрат, окажется внутри круга?

Решение. По определению геометрической вероятности искомая вероятность равна отношению площади круга (в который точка должна попасть) к площади квадрата (в которой точка ставится), т. е.

$$P(A)=\frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{кв}}}=\frac{4\pi}{16}=\frac{\pi}{4}\approx\frac{3{,}14}{4}=0{,}785.$$

Ответ: 0,785.

Пример: 3. В квадрат с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0) наудачу брошена точка $(x\,;\,y)$. Найдем вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y<2x$.

Решение. По заданным в условии координатам построим квадрат и график уравнения $y = 2x$ (рис. 50).

Для того чтобы координаты точки, брошенной наугад в квадрат с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0), удовлетворяли неравенству $y = 2x$, надо чтобы эта точка попала в фигуру F, которая является частью квадрата, расположенного ниже прямой — графика функции $y = 2x$.

Воспользуемся формулой $P(A) = \dfrac{S(F)}{S(E)}$,

где $S(F)$ — площадь фигуры F, $S(F)$ — площадь квадрата. Вычислим $S(E)$ и $S(F)$.

$S(E) = 1$ и $S(F) = S(E) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Тогда $P(A) = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

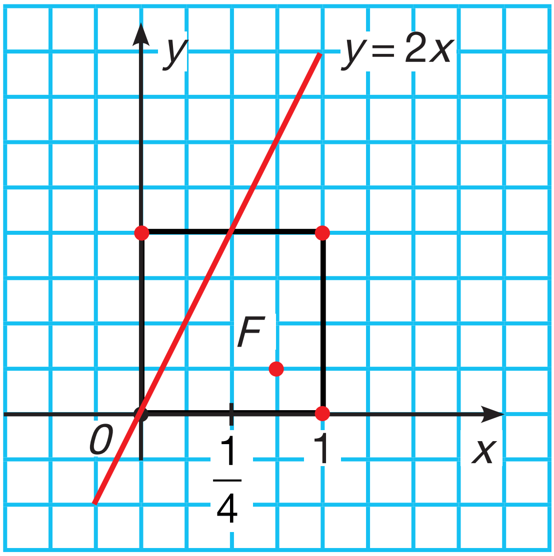


Рис. 50

Геометрической вероятностью события A (выбранная точка окажется из области отрезка FE) является и вероятность события, которая находится по формуле $P(A)=\dfrac{\iota(FE)}{\iota(MN)}$ где $\iota(MN)$ — длина некоторого отрезка $\iota(FE)$ — длина некоторого отрезка FE, и отрезок FE полностью вмещается в отрезок MN (рис. 51).

Пусть отрезок длиной l включается в отрезок длиной L. Вероятность события A — «наудачу брошенная точка попала на отрезок длиной l» определяется равенством:

$$P(A) = \frac{l}{L}.$$

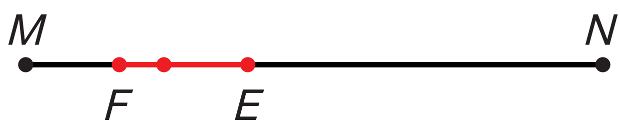


Рис. 51

Пример: 4. На отрезке AD длиной 15 см наугад отметили точку X. Какова вероятность того, что она находится на расстоянии не более 7 см от точки A и не больше 11 см от точки D?

Решение. Изобразим условие с помощью рисунка 52. По условию задачи $AC = 7$ см, $BD = 11$ см.

Рис. 52

Точка X лежит на отрезке BC, длина которого равна 7 + 11 – 15 = 3 (см).

Тогда по формуле,

$$P(A) = \frac{BC}{AD} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

Геометрической вероятностью события A — выбранная точка окажется из области тела Е является вероятность события, которая находится по формуле

$$P(A) = \frac{V(E)}{V(D)},$$

где $V(E)$ — объем тела E, $V(D)$ — объем тела D, и тело E полностью вмещается в тело D (рис. 53).

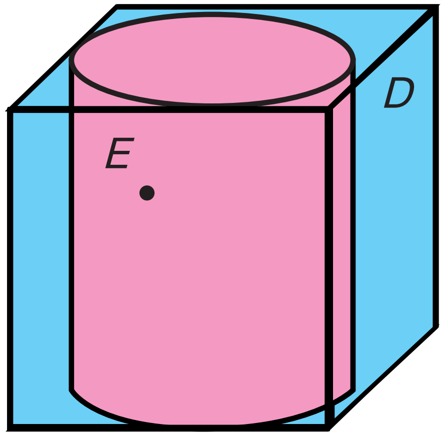


Рис. 53

Пусть пространственная фигура объемом υ включается в пространственную фигуру объемом V. Вероятность события A «наудачу брошенная точка попала на пространственную фигуру объемом υ» определяется равенством:

$$P(A) = \frac{\upsilon}{V}.$$

Пример: 5. Внутри прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4 см, 8 см, 16 см находится куб, длина ребра которого равна 4 см. Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка X прямоугольного параллелепипеда окажется внутри куба?

Решение: Объем куба равен 64 см^3, объем параллелепипеда — 512 см^3. Следовательно, $P(A)=\dfrac{V_k}{V_n}=\dfrac{64}{512}=\dfrac{1}{8}=0{,}125.$

Ответ: 0,125.

Объясните

Почему все рассмотренные случаи вычисления геометрической вероятности можно выразить одной формулой $P(A)=\dfrac{m_E(F_1)}{m_E(F)}$, где $F_1 \subset F$, $m_E(F_1)$ и $m_E(F)$ — геометрические меры (длины, площади или объема)?

?

1. К каким геометрическим величинам применяют геометрическую вероятность?

2. В каком случае геометрическая вероятность равна: 1) 0; 2) 1?

A

21.1. На стол бросают игральный кубик. Найдите вероятность того, что:

1) на кубике появится 4 очка;

2) на кубике появится четное число очков.

21.2. На отрезок длиной в 1 см наугад брошена точка. Какова вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит $\frac{1}{4}$?

21.3. В квадрат, длина стороны которого равна 2 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что точка A попадает в квадрат, находящийся в первом квадрате, длина стороны которого равна 1 см?

21.4. В квадрат, длина стороны которого равна 2 см, наугад брошена точка A.

Какова вероятность того, что точка A не попадает в квадрат, находящийся в первом квадрате, длина стороны которого равна 1 см?

21.5. В круг, длина радиуса которого равна 2 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка попадает в круг, находящийся внутри первого круга, длина радиуса которого равна 1 см.

21.6. В круг, длина радиуса которого равна 2 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка не попадает в круг, находящийся внутри первого круга, длина радиуса которого равна 1 см.

21.7. В шар, длина радиуса которого равна 3 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка попадает в шар, находящийся внутри первого шара, длина радиуса которого равна 2 см.

21.8. В шар, длина радиуса которого равна 3 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка не попадает в шар, находящийся внутри первого шара, длина радиуса которого равна 2 см.

В

21.9. На отрезке AB длиной 12 см наугад ставят точку M. Найдите вероятность того, что площадь квадрата, построенного на отрезке AM, будет заключена между площадями, равными 36 см^2 и 81 см^2.

21.10. 1) Случайным образом выбирается целое число из промежутка [1; 10]. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x + 6 < 0$.

2) Случайным образом выбирается целое число из промежутка [1; 10]. Найди-

те вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x + 6 \le 0$.

21.11. 1) В квадрат, длина стороны которого равна 1 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что расстояние от точки A до стороны квадрата не превосходит $\frac{1}{3}$?

2) В квадрат, длина стороны которого равна 1 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит $\frac{1}{3}$?

3) В квадрат, длина стороны которого равна 1 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что расстояние от точки A до указанной вершины квадрата не превосходит $\frac{1}{4}$?

21.12. На координатной плоскости построены две концентрические окружности, длины радиусов которых равны 5 см и 10 см. Точка брошена наудачу в большой круг. Найдите вероятность того, что точка попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

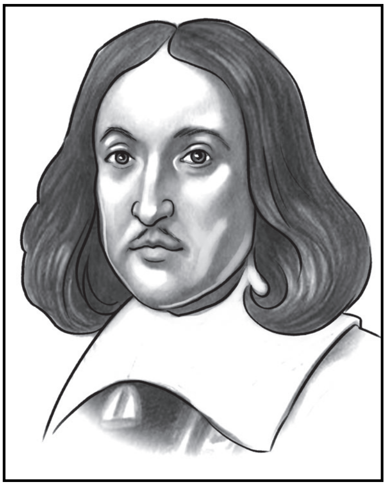
С

21.13. В куб вписан шар. Точка наугад бросается в куб. Найдите вероятность того, что точка попадет в шар.

***21.14.** В шар вписан куб. Точка наугад бросается в шар. Какова вероятность того, что она попадет в куб?

***21.15.** В куб вписан шар. Точка наугад бросается в куб. Найдите вероятность того, что она не попадет в шар.

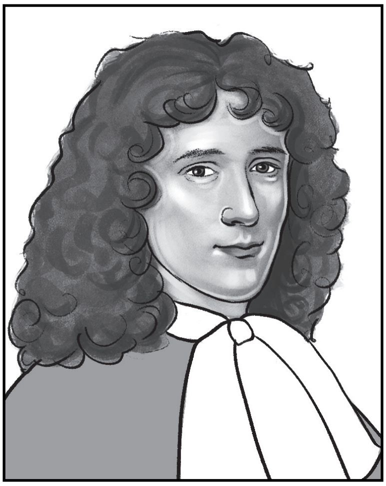
Подготовьте сообщение об ученых-математиках



Пьер де Ферма (1601–1655)

Возникновение теории вероятностей как науки относят к Средним векам.

Самые ранние работы ученых в области теории вероятностей относятся к XVII в. Исследуя прогнозирование выигрыша в азартных играх, Блез Паскаль и Пьер де Ферма открыли первые вероятностные закономерности, возникающие при бросании костей. Решением тех же задач занимался и Христиан Гюйгенс. Важный вклад в теорию вероятностей внес Якоб Бернулли.



Христиан Гюйгенс (1629–1695)

Якоб Бернулли (1654–1705)

Проверь себя!

1. События, которые в результате испытания могут наступить одновременно, называются:

A) достоверными;
B) невозможными;
C) случайными;
D) противоположными;
E) равновозможными.

2. В корзине лежат 9 красных, 5 синих и 6 желтых шариков. Из корзины вынимается один шарик. Вероятность того, что шарик окажется синим, равна:

A) $\frac{2}{5}$; C) $\frac{5}{16}$; E) 0,4.

B) 0,25; D) $\frac{3}{8}$;

3. Натуральные числа от 1 до 32 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. Из урны извлекается одна карточка. Найдите вероятность того, что число на этой карточке кратно числу 4:

A) $\frac{8}{25}$; C) $\frac{7}{32}$; E) 0,3.

B) 0,5; D) 0,25;

4. Найдите вероятность того, что в выбранном наудачу двузначном числе все цифры разные:

A) 0,5; C) 0,6; E) 0,85.

B) $\frac{8}{9}$; D) 0,75;

5. В мешочке находится 10 альчиков красного цвета, 10 — синего, 6 — желтого и 6 белого цвета. Найдите вероятность того, что наудачу вынутый альчик будет красным или белым:

A) 0,2; C) 0,4; E) 0,35.
B) 0,3; D) 0,5;

6. В магазине имеются 40 смартфонов, причем 20 из них импортного производства. Найдите вероятность того, что среди 6 проданных в течение дня смартфонов окажется 3 импортных, предполагая, что вероятности покупки смартфонов разных марок одинаковы:

A) $\dfrac{C_{20}^3}{C_{40}^3}$; C) $\dfrac{C_{20}^3}{C_{40}^6}$; E) $\dfrac{C_{20}^2+C_{20}^3}{C_{40}^6}$.

B) $\dfrac{2C_{20}^3}{C_{40}^6}$; D) $\dfrac{C_{20}^2\cdot C_{20}^3}{C_{40}^6}$;

7. Выбирается натуральное число от 1 до 20. Найдите вероятность того, что это число является корнем уравнения $(x^2-10x+24)(x^2-8x+15)=0$:

A) 0,25; C) 0,4; E) 0,1.
B) 0,5; D) 0,2;

8. Точка отмечается внутри квадрата со стороной 20 см. Найдите вероятность того, что она не выбрана из круга, вписанного в этот квадрат:

A) 0,25; C) 0,4; E) 0,6.

B) $1-\dfrac{\pi}{4}$; D) $\dfrac{\pi}{4}$;

9. Выбирается натуральное число от 1 до 10 включительно. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $(x^2-2x+24)(x^2-$ $-2x-15)\le 0$:

A) 0,25;
B) 0,3;
C) 0,4;
D) 0,1;
E) 0,2.

10. Выбирается целое число от –9 до 10 включительно. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $(x^2-9)(x^2-8x-9)<0$:

A) 0,25;
B) 0,3;
C) 0,4;
D) 0,2;
E) 0,5.

11. Среди 30 экзаменационных вопросов 5 «легких» и 6 «сложных». Двое учащихся получают один из вопросов. Какова вероятность того, что второй ученик получил «сложный» вопрос, если первый ученик получил «легкий» вопрос:

A) 0,15; C) 0,14; E) 0,3.

B) $\frac{2}{29}$; D) $\frac{6}{29}$;

12. Дано выражение $\sqrt{n-6}$. Значение переменной ***n*** случайно выбирается среди натуральных чисел от 1 до 100. Найдите вероятность того, что значение выражения меньше 4:

A) 0,12; C) 0,18; E) 0,3.
B) 0,16; D) 0,2;

Упражнения для повторения курса алгебры 10 класса

Вычисление выражений

1. Найдите значение выражения:

1) $\cos 60° - \sin 60° + ctg 60° - tg 60°$;

2) $-\sin 30° + \cos 30° - ctg 30° + tg 30°$;

3) $\cos 45° - tg 45° - \sin 45° + ctg 45°$;

4) $\sin 0° - \cos 30° + tg 45° - ctg 60°$;

5) $-\cos 0° + tg 30° - ctg 45° + \sin 60°$;

6) $tg 0° - ctg 90° - \sin 0° - \cos 90°$.

2. Найдите значение выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{6} + tg\frac{\pi}{6} - 5ctg\frac{\pi}{3}$;

2) $\cos\frac{\pi}{2} + 9\sin\frac{\pi}{2} - ctg\frac{\pi}{4} - 7tg 0°$;

3) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+2ctg\frac{\pi}{3}-11ctg\frac{\pi}{4}$;

4) $ctg\frac{\pi}{6}-5\sin\frac{\pi}{3}+6\cos\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{6}$.

3. Вычислите:

1) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}tg60^\circ}{\sin\frac{\pi}{6}+\cos60^\circ}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3}ctg30^\circ+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{2tg45^\circ-\cos0^\circ}$;

3) $\dfrac{tg30^\circ+\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2}-4ctg45^\circ}$;

4) $\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ + \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}}{5tg\dfrac{\pi}{4} - 4\,c\,tg\dfrac{\pi}{4}}$;

5) $6\cos 40^\circ - 8\cos^3 40^\circ$;

6) $\dfrac{4\sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$.

4. Найдите:

1) $\cos\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}7$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) $\sin\alpha$, $ctg\alpha$, $tg2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

3) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $tg\alpha = 5$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

5. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, $\cos 4\alpha$, $ctg 4\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $0° < \alpha < 90°$;

2) $\cos 2\alpha$, $tg 2\alpha$, $\sin 4\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $180° < \alpha < 270°$.

6. Найдите:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{7}{9}$ и $0° < \alpha < 90°$;

2) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ и $90° < \alpha < 180°$.

7. Найдите:

$(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $tg(\alpha+\beta)$, если

$\sin\beta=\dfrac{1}{9}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$, $\sin\beta=\dfrac{1}{9}$,

$\cos\beta=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$ и $\alpha,\ \beta\in$ I четверти.

8. Найдите:

$(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $tg(\alpha-\beta)$, если

$\sin\alpha=\dfrac{6}{7}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{13}}{7}$, $\sin\beta=\dfrac{7}{8}$,

$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ и $\alpha,\ \beta\in$ I четверти.

9. Вычислите d и a_n арифметической прогрессии, если:

1) $a_1=8{,}5;\ a_2=10{,}5;\ n=4;$

2) $a_1=-19;\ a_2=-16;\ n=6;$

3) $a_1 = 23;\ a_2 = 19;\ n = 5;$

4) $a_1 = -1{,}7;\ a_2 = -3{,}7;\ n = 7.$

10. Найдите a_1 и a_n арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 1{,}6;\ d = 0{,}2;\ n = 10;$

2) $a_3 = 27;\ d = -0{,}5;\ n = 8;$

3) $a_4 = 4{,}6;\ d = 2{,}3;\ n = 7;$

4) $a_2 = 0;\ d = -4{,}1;\ n = 9.$

11. Найдите $\boldsymbol{n}$ и S_m арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -35;\ a_n = -20;\ d = 5$ и $m = 6;$

2) $a_2 = 30;\ a_n = 20;\ d = -5$ и $m = 5;$

3) $a_4 = 6{,}2;\ a_n = 7{,}4;\ d = -0{,}4$ и $m = 10;$

4) $a_3 = -6{,}6;\ a_n = -7{,}3;\ d = 0{,}7$ и $m = 20.$

12. Найдите a_1, если:

1) $d = -20;\ S_4 = 320;$

2) $d = 20;\ S_6 = 60;$

3) $d = 30;\ S_7 = 259;$

4) $d = -40;\ S_9 = 1350.$

13. Вычислите $\boldsymbol{q}$ и b_{n} геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 0{,}7;\ b_2 = 1{,}4;\ n = 5;$

2) $b_1 = 0{,}6;\ b_2 = 1{,}8;\ n = 7;$

3) $b_1 = 0{,}2;\ b_2 = 1{,}4;\ n = 4;$

4) $b_1 = 0{,}3;\ b_2 = -1{,}2;\ n = 6.$

14. Найдите b_1 и b_n геометрической прогрессии, если:

1) $b_2 = -243;\ q = -\dfrac{1}{3};\ n = 4;$

2) $b_3 = 81;\ q = -\frac{1}{3};\ n = 8;$

3) $b_4 = 128;\ q = -\frac{1}{2};\ n = 10;$

4) $b_5 = 64;\ q = -\frac{1}{2};\ n = 9.$

15. Найдите S_n геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = -1000;\ q = 0,5;\ n = 6;$

2) $b_1 = 400;\ q = 0,2;\ n = 7;$

3) $b_1 = 900;\ q = 0,01;\ n = 6;$

4) $b_1 = -500;\ q = -0,2;\ n = 8.$

16. Найдите b_1 геометрической прогрессии, если:

1) $b_4 = -\frac{27}{32};\ q = -\frac{3}{4};$

2) $b_5 = -16;\ q = \dfrac{2}{3};$

3) $b_3 = 90;\ q = \dfrac{3}{5};$

4) $b_4 = 12{,}5;\ q = -\dfrac{5}{6}.$

Тождественные преобразования выражений

17. Упростите выражение:

1) $tg\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot ctg(2\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot$

$\cdot\, tg(2\pi + \alpha);$

2) $\cos(2\pi - \alpha) \cdot \left(tg\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 \cdot tg(\pi + \alpha) \cdot$

$\cdot \left(ctg\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2.$

18. Докажите, что значение выражения

$$2\sin(-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(360^\circ-2\alpha)\cdot$$

$$\cdot\, c\,tg\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)-2\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

равно нулю.

19. Верно ли равенство

$$0{,}5\cos 8\alpha-1{,}5-\cos^2 4\alpha=1?$$

20. Упростите выражение:

1) $\dfrac{ctg^2(270^\circ-3\alpha)\cos(2\alpha+90^\circ)\cos(\alpha-180^\circ)ctg(-\alpha)}{\sin(\alpha-90^\circ)tg(270^\circ+\alpha)\cos(-\alpha)tg^2(180^\circ+3\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\beta+63^\circ)+\sin(\beta-57^\circ)}{2\cos(\beta-87^\circ)}$.

21. Докажите, что значение выражения

$$2\left(0,5-0,5\cos 4\alpha+\frac{1}{1+tg^2 2\alpha}\right)-$$

$$-(1-\sin^2 2\alpha)\cdot\frac{1}{ctg^2 2\alpha}-\cos^2 2\alpha$$ равно

единице.

22. Упростите выражение:

1) $$\left[\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]:\left[\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{ctg\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot ctg\left(180^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right];$$

2) $$\frac{\sin^2\alpha-tg^2\alpha}{\cos^2\alpha-ctg^2\alpha};$$

3) $\frac{1}{8}\cos 4\alpha + 0{,}5\cos 2\alpha + \frac{3}{8}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha - tg^2\alpha}{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha}$.

23. Верно ли равенство

$$\frac{\cos^2(\pi + 4\alpha) - \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2(\pi - (\alpha + \beta)) + tg^2(\alpha + \beta) - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)} =$$

$= \cos^2(\alpha + \beta)$?

24. Упростите выражение:

1) $tg7\alpha \cdot ctg7\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{3} \cdot ctg^2\frac{\alpha}{3} + \sin^2\frac{\alpha}{3}$;

2) $(0{,}5 + 0{,}5\cos 10\alpha) : (0{,}5 - 0{,}5\cos 10\alpha) \cdot tg^2 5\alpha$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{1-8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{tg2\alpha - 1}$.

25. Докажите тождество:

1) $$\frac{tg\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\sin(2\pi-2\alpha)\cos(-2\alpha)}{ctg(2\pi-4\alpha)\left(\cos^2 2\alpha-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)} =$$

$= 0,5tg4\alpha$;

2) $tg\alpha\cdot tg\beta + (tg\alpha + tg\beta)ctg(\alpha+\beta) = 1$;

3) $(tg\alpha - tg\beta)\cdot ctg(\alpha-\beta) - tg\alpha\cdot tg\beta = 1$;

4) $4\sin^6\alpha + 4\cos^6\alpha - 1 = 3\cos^2 2\alpha$.

Практико-ориентированные задания

26. Дано 10 закрытых замков и 10 похожих ключей к ним. К каждому замку подходит только один ключ, но ключи смешались. Если взять первый замок и попробовать открыть его каждым из десяти ключей, то в лучшем случае он откроется первым же ключом, в худшем — только десятым. Сколько нужно максимум произвести проб, чтобы открыть все замки?

27. На одной из улиц города по обе стороны в один ряд расположены 100 домов. Каждому дому присвоен порядковый номер. Дома с нечетными номерами расположены слева, с четными — справа. На каком месте расположен дом № 90?

28. В доме, в котором живет Алия, один подъезд. На каждом этаже по 10 квартир. Алия живет в квартире № 88. На каком этаже живет Алия?

29. Станок разрезает 300 шестиметровых досок на куски по 2 м в каждом за 1 ч. Сколько времени потребуется, чтобы на этом же станке разрезать 400 восьмиметровых досок такой же ширины и толщины на куски по 2 м в каждом?

30. Периметр прямоугольника равен 36 см. Длины его сторон выражены целыми числами. Сколько можно построить прямоугольников согласно условию задачи?

31. В семье 9 детей, значение суммы их возрастов 117. Найдите возрасты всех детей, если известно, что они рождались каждые 3 года.

32. В классе 28 учащихся. Из них — 12 ходят на вокал, 19 — на танцы и 5 человек занимаются в обоих кружках. Сколько учащихся из этого класса не посещают ни один из этих кружков?

33. Арман и Нуржан считают деревья, растущие вокруг пруда. Они двигаются в одном направлении, но начинают счет с разных деревьев. То дерево, которое Арман назвал двадцатым, у Нуржана оказалось четвертым, а дерево, которое Арман посчитал десятым, для Нуржана оказалось сорок шестым. Сколько деревьев растет вокруг пруда?

34. Масса ящика с яблоками равна 20 кг. После продажи половины всех яблок ящик поставили на весы. Весы показали 12 кг. Какова масса пустого ящика?

Математика в строительстве

35. 1) Для перевозки 56 т груза на 300 км можно использовать машины одной из транспортных компаний, причем грузоподъемность машин разная. Вычисли по таблице, услугами какой компании надо воспользоваться для самой дешевой перевозки.

Таблица 6

Транспортные компании	Грузоподъемность машины	Стоимость перевозки одной машиной на 100 км
I	3 т	6000 тг
II	5 т	8000 тг
III	6 т	10000 тг

2) При увеличении здания на один этаж, высота здания увеличивается на 3,5 метра. В микрорайоне построено 5 пятиэтажных, 4 девятиэтажных домов, детский садик в два этажа и школа в три этажа. Найдите значение суммы высот всех зданий микрорайона.

Математика в бизнесе

36. На диаграмме (рис. 54) представлены данные о сумме первоначального вклада и сумме вклада с учетом годового прироста в банках *X* и *У*.

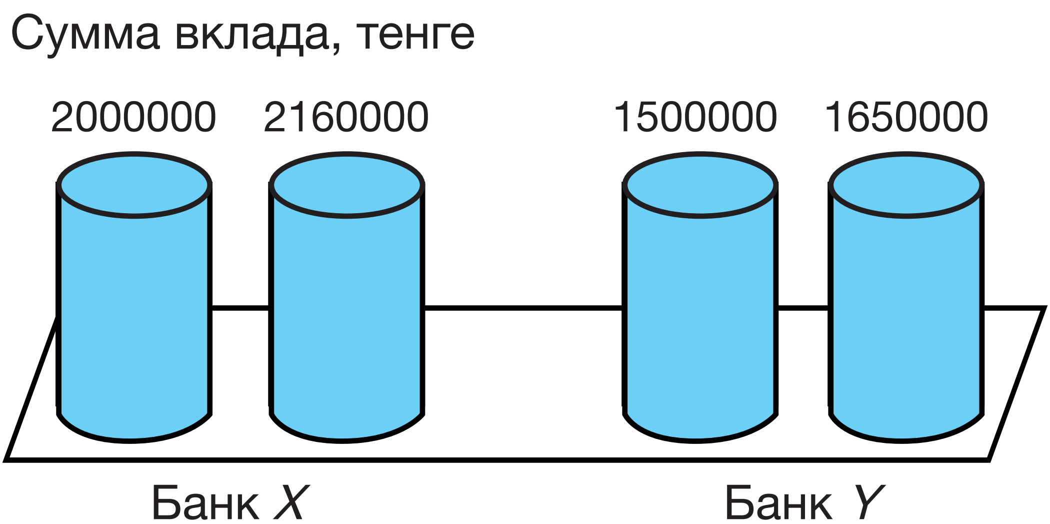


Рис. 54

1) Найдите годовой процентный прирост суммы вклада в банках *X* и *У*;
2) Найдите разницу между годовыми процентными приростами в банках *X* и *У*.

Математика в профессии шофера

37. В штате гаража числится 54 шофера. Найдите количество дней отдыха, которые может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомашин, из имеющихся 60, остаются в гараже для профилактического ремонта.

Элементы теории вероятностей

38. 1) В урне 4 белых и 8 красных шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:
а) белый; б) красный.
2) В урне 6 красных, 4 белых и 10 синих шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:
а) красный; б) не белый; в) синий.

39. Брошена игральная кость. Найдите вероятность выпадения:
1) двух или трех очков;
2) пяти или четырех очков;
3) нечетного очка.

40. Для экзамена подготовлены билеты с номерами от 1 до 30. Какова вероятность того, что взятый наугад школьником билет имеет:
1) однозначный номер;
2) нечетный номер?

41. 1) В квадрат, длина стороны которого равна 4 см, наугад брошена точка A. Какова вероятность того, что точка A не попадет в квадрат, находящийся в первом квадрате, длина стороны которого равна 2 см?
2) В круг, длина радиуса которого равна 4 см, наугад брошена точка B. Найдите вероятность того, что эта точка попадет в круг, находящийся внутри первого круга, длина радиуса которого равна 2 см.

3) Случайным образом выбирается число из промежутка [–2; 8]. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 2x + 8 < 0$.

4) Случайным образом выбирается число из промежутка [–3; 7]. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 2x + 9 \leq 0$.

Комбинаторика

42. 1) Найдите количество четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 7, 8, при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды.

2) Найдите число способов раскрасить прямоугольник, ромб и квадрат тремя различными цветами: синим, красным, зеленым.

43. 52 школьника приняли участие в олимпиаде по математике, 33 — по информатике, 11 — по двум предметам. Сколько всего школьников участвовало в олимпиадах по этим предметам?

44. Из 70 открыток на 47 изображены ромашки, на 30 — нарциссы, на 10 — сирень с ромашками, на 6 — сирень с нарциссами, на 5 — нарциссы с ромашками, на 4 — сирень с ромашками и нарциссами. Найдите число открыток с сиренью.

45. Найдите корни уравнения:

1) $A_x^3 = 8x - 3x^2$;

2) $A_x^3 = 2x^2 - 3x^2 - 14x$;

3) $C_x^2 = x + 5$.

46. В меню столовой имеются 4 салата, 3 первых, 5 вторых и 3 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из четырех блюд (салат, первое, второе и третье)?

47. 1) Абонент забыл последние 2 цифры номера телефона. Какое максимальное число номеров ему нужно перебрать, если он знает, что две последние цифры различны и нечетные?

2) Из 30 вопросов к экзамену учащийся 22 выучил, 4 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билетах будет три вопроса. Сколько из них тех, в которых учащийся знает ответы на все вопросы?

48. В разложении $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^4$ по степеням $\boldsymbol{x}$ найдите одночлен:

1) содержащий x^2;
2) не содержащий $\boldsymbol{x}$.

ГЛОССАРИЙ

Алгоритм	**Алгоритм** — это последовательность простейших действий, строго выполняемых для достижения определенной цели.
Благоприятствующий исход	Исход опыта, в котором наблюдается интересующее нас событие, называется **благоприятствующим исходом.**
Вероятность классическая	Вероятностью события ***A*** называется отношение числа ***m***, благоприятствующих этому событию исходов, к общему числу исходов ***n***, если они равновозможные.
Геометрические вероятности	**Геометрические вероятности** — вероятности попадания точки в часть отрезка, плоскости, пространственной фигуры.
Достоверное событие	Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в данном испытании.

Невозможное событие	Событие называется невозможным, если оно не может произойти в данном испытании, т. е. свершение которого при данных условиях исключается.
Противоположное событие	**Событием, противоположным событию** A, называется событие $\overline{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.
Случайное событие	Событие называется **случайным**, если оно может произойти, но может и не произойти.
Событие	Под **событием** понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит (имеет место) или не происходит. Событиями являются и результаты различных опытов, наблюдений и измерений.

Статистическая вероятность	**Статистической вероятностью события** A называется относительная частота (частость) появления этого события в $\boldsymbol{n}$ произведенных испытаниях.
Тригонометрическое тождество	**Тригонометрическим тождеством** называется равенство, в которое входят тригонометрические функции, и которое верно при любых допустимых значениях угла — аргумента тригонометрических функций, но неверно, если каждую из функций заменить произвольной величиной.
Тригонометрические функции	Зависимости синуса, косинуса, тангенса и котангенса от величины угла α называются **тригонометрическими функциями**.
Формулы приведения	Формулы, по которым тригонометрические функции угла вида $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ (где $\boldsymbol{k}$ — любое

	целое число, α — острый угол) приводятся к тригонометрическим функциям угла α, называются формулами приведения.
Формулы сложения	Формулы, позволяющие выразить тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих же углов, называются **формулами сложения**.
Элементарные события	События, которые нельзя разделить на более простые события, называются **элементарными событиями**.
Функция Антье от x	**Функцией Антье** называется функция $E(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).

ОТВЕТЫ

Глава II. Тригонометрия

11.1. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.2.** 1) $\cos\alpha$; 2) $-\sin\alpha$; 3) $-\cos^2\alpha$; 4) 1. **11.3.** 1) $\frac{1}{3}$; 4) 1,2; 6) –8. **11.4.** 9) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 10) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 11) $\frac{2}{\sin\beta}$; 12) $\frac{2}{\sin\beta}$. **11.6.** $-\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$. **11.7.** $\frac{7}{25}$; $-\frac{7}{24}$. **11.8.** 1) $tg^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$. **11.11.** 1) $9\frac{1}{9}$; 2) $2\frac{1}{9}$. **11.12.** 1) $\frac{2}{|\sin\alpha|}$; 2) $2|\cos\alpha|$. **11.14.** 1) 0,64; 2) 0,1; 3) $6\frac{2}{3}$; 4) 5. **11.16.** 3) $-\frac{25}{41}$; 4) $-\frac{15}{29}$. **11.17.** 1) $\frac{11}{5}$; 2) –6; 3) $\frac{15}{34}$; 4) 0. **11.19.** 1) Наименьшее — (–2) при $\alpha = 90^\circ + 180^\circ n$, $n \in Z$; наибольшее — 0 при $\alpha = 180^\circ n$; 3) множество значений выражения числовой интервал (3; 7), наибольшего и наименьшего значений указать нельзя; 4) множество значений выражения числовой интервал (–1; 4), наибольшего и наименьшего значений указать нельзя. **11.20.** 1) $\sin\beta+\cos\beta+1$; 2) 2. **11.21.** 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) нет. **11.22.** 18. Указание: $\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=tg\alpha+ctg\alpha$. **11.23.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) $0{,}25\sin^2 2\alpha$. **11.24.** 1) $\pm\sqrt{1{,}64}$; 2) 1,176; 3) 0,7952. **11.25.** 1) 3150; 2) 3105. **11.27.** 1) 1; 2) 1. **11.28.** 1) $[-1;\ 3)\cup\ \cup[8;\ -\infty)$; 4) $\{-3\}\cup(-2;\ 1)\cup[5;\ +\infty)$. **11.30.** 1) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **12.4.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$; 5) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 6) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. **12.5.** 3) $2\sin\alpha$; 4) 0. **12.6.** 1) $-\sin 5°$; 2) $-\cos 45°$; 3) $-ctg 15°$; 5) $\sin 45°$; 7) $-tg\dfrac{\pi}{3}$; 9) $-\sin\dfrac{\pi}{4}$; 10) $\cos\dfrac{\pi}{5}$; 11) $-\sin 31°$; 12) $ctg 19°$. **12.7.** 1) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\dfrac{1}{4}$;

3) $\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **12.9.** 1) – ; 2) +; 3) – ; 4) –. **12.10.** 1) $ctg\alpha$; 2) $ctg\alpha$; 3) $tg\alpha$. **12.11.** 1) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.13.** 1) 0; 2) 0. **12.14.** 1) $-\sqrt{3}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **12.15.** 1) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 2) $-\frac{1}{\sin\alpha}$; 3) $-\sin^2\alpha$; 4) $-\sin^2\alpha$. **12.16.** 1) 2; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **12.19.** 1) –1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **12.20.** 1) $\sin\alpha$; 2) $-\cos\alpha$; 3) $tg\alpha$; 4) 1. **12.22.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) –1. **12.23.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 0,75; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **12.25.** 2) 0. **12.26.** 1) $\sin\alpha = 0{,}6$; $ctg\alpha = \frac{4}{3}$. **12.27.** 60 км/ч и 90 км/ч. **12.28.** 1) $[-3;\ 2)\cup(4;\ 6]$; 2) $[-4;\ 1]$. **12.29.** 1) $\sin\alpha$; 2) $2\sin\alpha+1$. **13.1.**

1) $\sin\alpha$; 5) $\cos\varphi$; 6) $-\sin\gamma$; 7) $\cos\alpha$; 8) $\sin 2\gamma$.

13.2. 1) 0,5; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0. **13.3.** 1) 0,5; 2) 0; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.4.** 1) $\frac{3+8\sqrt{2}}{15}$; 2) $\frac{3-8\sqrt{2}}{15}$; 3) $\frac{4-6\sqrt{2}}{15}$; 4) $\frac{4+6\sqrt{2}}{15}$. **13.5.** 1) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{15}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **13.8.** 6) $2+\sqrt{3}$; 7) $2+\sqrt{3}$. **13.9.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{0,91}-0,3)$; 4) $\frac{\sqrt{3}-10\sqrt{91}}{20}$. **13.10.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}\cos\alpha$; 4) $0,5\sin\alpha$. **13.11.** 1) $\sin\alpha\cdot\cos\beta$; 2) $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; 3) $\sin\alpha\cdot\cos\beta$; 4) $\sin\alpha\cdot\cos\beta$.

13.13. 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.14.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **13.16.** 1) $ctg\alpha\cdot tg\beta$; 2) $-ctg\alpha\cdot ctg\beta$;

4) $-tg\alpha$. **13.19.** 1. **13.20.** $\frac{2\sqrt{10}-2}{9}$. **13.21.** 1) $\left\{(0;\ 0);\ \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\right)\right\}$; 2) $\{(1;\ 1)\}$. **13.22.** 1) 53%; 2) $2\frac{3}{11}$ кг. **13.24.** 1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; 2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

13.25. $tg\alpha=-\frac{2}{\sqrt{21}}$, $ctg\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$. **14.1.** 1) $1\frac{1}{6}$; 2) $-\frac{2}{9}$; 3) $\frac{6}{7}$; 4) –4,5. **14.2.** – 10,5; $\frac{11}{18}$. **14.3.** 1) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; 6) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$. **14.5.** 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1.

14.6. 1) $tg\alpha+tg\beta$; 2) $tg^2\alpha-tg^2\beta$. **14.8.** 1) $tg40^\circ\cdot tg10^\circ$; 2) $tg3^\circ\cdot tg0{,}6^\circ$. **14.9.** 1) 1; 2) $\frac{tg^2\alpha-3}{1-3tg^2\alpha}$; 3) 0; 4) $\frac{4tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$. **14.12.** 1) $1-tg\beta$; 2) $1-tg\beta$. **14.15.** 1) $[-\sqrt{5};\ \sqrt{5}]$; 2) $[-\sqrt{10};\ \sqrt{10}]$; 3) $[-2;\ 2]$; 4) $[-2;\ 2]$; 5) $[-\sqrt{41};\ \sqrt{41}]$;

6) $[-3\sqrt{5};\ 3\sqrt{5}]$. **14.16.** 0. **14.17.** 1) $[-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty]$; 2) $[-1;\ -\sqrt{14};\ 1+\sqrt{6}]$. **14.19.** 1) $2\sin\beta$; 2) $2\sin\beta$. **15.1.** 2) tgx; 3) $-\cos 2x$; 4) $-(\sin x+\cos x)$; 5) $2\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$; 7) 1; 9) $4\sin x\cdot\cos^2 x$. **15.2.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}+1$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}+2$; 4) 0,5; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{1}{16}$. **15.3.** 3) $\cos^2\alpha$; 6) 1; 7) $c\,tg\frac{\alpha}{2}$. **15.4.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{23}{25}$; 3) $-\frac{24}{7}$. **15.8.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $tg2\alpha$;; 5) $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; 7) $2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; 8) 1; 9) 0; 10) $-\frac{1}{\sin 2\alpha}$. **15.9.** а) $-\frac{24}{25}$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **15.14.** 1) $\cos 4\beta$; 2) 0; 3) $tg^2\frac{\beta}{2}$; 4) $-0{,}5ctg2\beta$. **15.15.** 2) $-\sin 2\alpha$; 4) $\frac{1}{2}$. **15.16.** 1) $\frac{60}{61}$; $\frac{11}{61}$; $\frac{60}{11}$; 2) $\sqrt{0{,}9}$; $-\sqrt{0{,}1}$; –3. **15.17.**

2) $-3\frac{1}{3}$. **15.18.** 1) $-\frac{120}{169}$; $\frac{119}{169}$; $-\frac{120}{169}$; 2) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{7}{24}$. **15.21.** 1) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{4}$. **15.24.** 1) 2; 1; 2) 1; 0,5; 3) 1; 0,25. **15.25.** 1) $\cos\beta$; 2) $\sin\beta$. **16.1.** 1) $2\sin 4x$; 2) $2\sin 4\beta\cdot\cos 2\beta$; 3) $2\cos 10\cdot\sin 5$; 4) $\sqrt{3}\cdot\cos 70^\circ$; 6) $2\sin 9\alpha\cdot\sin 4\alpha$. **16.2.** 2) $\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{12}$; 3) $2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{10}$; $6\sin x$. **16.3.** 3) $\sqrt{3}\cos\alpha$; 6) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\beta}{2}\right)$. **16.5.** 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$; 5) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)\cdot$ $\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$; 6) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$. **16.6.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}ctg7^\circ$; 2) $\sqrt{3}\,ctg80^\circ$; 3) $tg10^\circ$. **16.7.** 1) $-tg2x$; 3) $ctg2x$; 4) $-ctg\frac{5x}{2}$; 6) $\frac{\cos 2\beta}{\sin\beta}$; 7) 1;

8) $ctg\alpha$. **16.8.** 1) $2\sqrt{3}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin 11^\circ \cdot \sin 34^\circ}$; 4) $\dfrac{2}{\sin 10^\circ}$; 6) $\dfrac{-\cos 110^\circ}{\sin 25^\circ \cdot \sin 85^\circ}$; 7) $\dfrac{1}{2\cos^2 15^\circ}$; 8) 0. **16.10.** 1) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$; 4) $\dfrac{1}{2}\cos 2x$. **16.11.** 1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 10. **16.12.** 1) 2; 2) 4; 3) –4; 4) –1. **16.13.** 1) $2\sqrt{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)$. **16.14.** 1) $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+4\beta\right)\cdot\left(\dfrac{\pi}{6}-4\beta\right)$; 2) $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+4\beta\right)\cdot$ $\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-4\beta\right)$; 3) $\dfrac{\cos 10\beta}{\cos^2 5\beta}$; 4) $-\dfrac{\cos 6\alpha}{\sin^2 3\alpha}$. **16.16.** 1) 4; 2) $6+2\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 1,5. **16.17.** 1) –0,8; 2) $-\sqrt{0{,}96}$; 3) $-5\sqrt{21}$; 4) $\dfrac{\sqrt{91}}{3}$. **16.18.** 1) $\dfrac{65}{113}$;

2) $\dfrac{52}{87}$. **16.19.** 1) $-\cos^2 x$; 2) $\sin 2x$. **16.20.** 1) $[-2;\ -1)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1;\ 8]$; 2) $(-2;\ -1)$. **16.21.** 1) $\cos\alpha\cdot\cos 2\beta$; 2) $\cos 3\alpha\cdot\cos 2\beta$. **16.22.** 1) $\cos 2\alpha\cdot\sin\beta$; 2) $\sin 3\alpha\cdot\cos 2\beta$. **17.1.** 1) $\dfrac{1}{2}(\sin 7\alpha+\sin 3\alpha)$; 4) $\dfrac{1}{2}(\cos 9\alpha+\cos 21\alpha)$; 6) $-\dfrac{1}{2}(\cos 18\alpha+\cos 24\alpha)$; 8) $\dfrac{1}{2}(\sin 8\alpha+\cos 2\alpha)$. **17.3.** 1) $\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$. **17.5.** 1) –1; 2) 1; 3) $\sqrt{2}$; 4) –3. **17.9.** 1) $2(\cos\beta+\cos 3\beta+\cos 5\beta+\cos 7\beta)$; 6) $(\cos 7\alpha-\cos 13\alpha-\cos 9\alpha+\cos 11\alpha)$. **17.10.** 1) $\dfrac{14}{27}$; 2) $-\dfrac{42}{125}$; 3) $2a(1-2a^2)^2-a$; 4) $4a(2a^2-1)(1-a^2)$.

17.12. 1) $\frac{14}{27}$; 2) $-\frac{14}{27}$. **17.14.** 1) 0; 2) 0. **17.15.** 1) 0; 2) 1. **17.17.** 1) $\cos 5° - \cos 15° + \cos 35° - \cos 45°$; 2) $\cos 10° + \sin 20° - \sin 60°$. **17.19.** 1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$; 2) $\frac{1}{16}$. **17.20.** 1) $\{(4;\ 3);\ (-4;\ -3)\}$; 2) $\{(-3;\ -2);\ (3;\ 2)\}$; 3) $\{(-1;\ -3);\ (1;\ 3)\}$; 4) $\{(2;\ 2);\ (-2;\ -2);\ (4;\ 1);\ (-4;\ -1)\}$. **17.21.** 1) $[-\infty;\ -4) \cup [-2;\ 0] \cup \cup (5;\ +\infty]$; 2) $[-2;\ 0) \cup [1;\ 6]$. **17.22.** 1) 1; 2) –2. **17.23.** 1) 1; 2) $2\cos^2\alpha$. **18.1.** 1) $\sqrt{2}\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$; 4) $2tg\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$; 5) 0; 6) 0. **18.2.** 1) $-2tg\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 5) 1; 6) $1+\sin\alpha$. **18.3.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) 1; 4) 0,5. **18.4.** 1) 3; 2) 1; 3) –2; 4) 0,5. **18.5.** 1) –9; 2) –2; 3) 13; 4) 7. **18.7.** 1) 4; 2) 2; 3) –1; 4) 0,125. **18.8.** 1) 1,2; 2) –8,5; 3) 2,15; 4) 2,1. **18.9.** 1) $\frac{8}{27}$;

2) $-\frac{32}{27}$; 3) $-\frac{28\sqrt{5}}{125}$; 4) $-\frac{16\sqrt{3}}{27}$. **18.10.** 1) 1; 2) 1. **18.11.** 1) –1,1 или 1,1; 2) –0,75 или 0,75; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) –1,2 или 1,2; 5) –0,64; 6) ± 4; ± 2. **18.12.** 1) –0,5; 2) –0,5. **18.13.** 1) –0,5; 2) 0,5; 3) 2,5; 4) 1. **18.14.** 1) $\frac{7}{8}$; 2) 0,944; 3) 0,936; 4) 224; 5) –80; 6) $\frac{13}{16}$. **18.15.** 1) 5; 2) 4; 3) 0,1; 4) –10. **18.16.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\beta$. **18.19.** $\frac{7}{8}$. **18.20.** $\frac{8\cos 2\alpha + 1}{2(\cos 2\alpha - 1)}$. **18.21.** 1) 0,125; 2) 0; 3) 1. **18.23.** 1) $[-\sqrt{2};\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ \sqrt{2}]$; 2) $[-\sqrt{2};\ -1) \cup$ $\cup (-1;\ 1) \cup (1;\ \sqrt{2}]$. **18.25.** 1) $\frac{2}{23}$; 2) $-\frac{72}{55}$. **18.26.** 2 и –2. **18.27.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **18.28.** 1) 4; 2) 9;

3) 1; 4) 10. **18.29.** 6. **18.30.** 1) 8; 2) 8. **18.31.** 20 способов. **18.32.** 43 яблока.

Глава III. Элементы теории вероятностей

19.1. 1) Случайное; 2) случайное; 3) невозможное; 4) достоверное. **19.2.** 1) Невозможное; 2) достоверное. **19.3.** Достоверное. **19.4.** 1) Случайное; 2) невозможное; 3) невозможное; 4) достоверное. **19.5.** 1) Случайное; 2) невозможное. **19.10.** 1) Моего соседа по парте зовут Алибек или Азамат; 2) явка на выборы не была от 82% до 93%; 3) на контрольной работе по математике я выполнил, как минимум, три задания из пяти. **19.11.** 1) При бросании монеты выпал герб; 2) при бросании игральной кости 4 очка не выпало; 3) из корзины, в которой лежат 3 белых и 6 красных шара, случайным образом вынут белый шар; 4) при бросании игральной кости выпало 4 и более очков; 5) случайно выбранная цифра больше или равна 7; 6) из 5 выстрелов по мишени ни одна из пуль в мишень не попала. **19.12.** Не является, простые события: выпало 1 очко, выпало 3 очка, выпало 5 очков. **19.13.** Равновозможные события — 1, 2, 3; равновозможные события — 4, 5. **19.14.** 1) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) 2. **19.15.** 1) $[\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; -) \cup \cup [\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 1)$; 2) $(-\infty; -2) \cup [0; 2] \cup [6; +\infty)$. **19.16.** 1) На 56%; 2) на 55%; 3) на 25%; 4) уменьшится на 40%. **19.17.** 150 шт. **19.18.** 3. **19.19.** 1) Выпали цифры 2, 4 или 6; 2) выпали цифры 1, 3 или 5; 3) выпали цифры 4, 5 или 6. **19.20.** Пример, $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$.

20.1. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **20.2.** 1) а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{5}{7}$; в) 0; 2) а) $\frac{4}{11}$; б) 1; в) $\frac{7}{11}$. **20.3.** 1) Неверное; 2) верное; 3) верное; 4) верное; 5) верное. **20.4.** 1) $\frac{17}{25}$; 2) $\frac{1}{5}$. **20.5.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0. **20.6.** $\frac{1}{18}$. **20.7.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{8}$. **20.8.** 1) $\frac{9}{25}$; 2) $\frac{16}{25}$. **20.9.** 1) 0,1; 2) 0,1; 3) 0,2; 4) $\frac{7}{90}$. **20.10.**

1) 0,2; 2) 0,04; 3) 0,3; 4) $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$. **20.11.** 48 попаданий. **20.12.** 1) $\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$; 2) $\frac{90}{99}=\frac{10}{11}$. **20.13.** 1) 0,4; 2) $\frac{3}{7}$; 3) 0,5. **20.5.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) –0,25. **20.17.** 1) n^2-2; 2) n^2+3. **20.18.** 1) 5 шт. 2) 5 с. **20.19.** Молока 140 г, 60 г пломбир. **20.21.** 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **21.1.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$. **21.2.** 0,5. **21.3.** 0,25. **21.4.** 0,75. **21.5.** 0,25. **21.6.** 0,75. **21.7.** $\frac{8}{27}$. **21.9.** $\frac{1}{4}$. **21.12.** 0,75. **21.13.** $\frac{\pi}{6}$. **21.14.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **21.15.** $1-\frac{\pi}{6}$.

Повторение курса алгебры 10 класса

1. 1) $\frac{3-7\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{-3-\sqrt{3}}{6}$; 3) 0; 4) $\frac{6-5\sqrt{3}}{6}$;
5) $\frac{5\sqrt{3}-12}{6}$; 6) 0. **2**. 1) $\frac{3-20\sqrt{3}}{6}$; 2) 8; 3) $\frac{4\sqrt{3}-57}{6}$;
4) $\frac{18-17\sqrt{3}}{6}$; **3.** 1) $\frac{9-7\sqrt{3}}{2}$; 2) 4; 3) $\frac{-5\sqrt{3}}{18}$; 4) 2;
5) 1; 6) 2. **4.** 1) $\frac{\sqrt{51}}{10}$; $0{,}14\cdot\sqrt{51}$; 0,02; 2) 0,8, $-\frac{3}{4}$,
$\frac{24}{7}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{26}}$, $-\frac{5}{\sqrt{26}}$, $-\frac{12}{13}$. **5.** 1) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\frac{17}{81}$,
$\pm\frac{17\sqrt{2}}{112}$; 2) $\frac{7}{9}$, $\frac{4\sqrt{2}}{7}$, $\frac{56\sqrt{2}}{81}$. **6.** 1) $\frac{1}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{4\sqrt{2}}{9}$;
2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{7}{9}$, $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$. **7.** $\cos(\alpha+\beta)=\frac{20\sqrt{7}-1}{54}$;
$\sin(\alpha-\beta)=\frac{4\sqrt{5}-\sqrt{35}}{54}$; $tg(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}(4+\sqrt{7})}{20\sqrt{7}-1}$.

8. $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{195}+42}{56}$; $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{27\sqrt{15}}{56}$;

$tg(\alpha-\beta)=\dfrac{7\sqrt{13}+6\sqrt{15}}{43+\sqrt{195}}$.

9.

№	1	2	3	4
d	2	3	-4	-2
d_n	14,5	-4	7	-13,7

10.

№	1	2	3	4
α_1	1,4	28	–2,3	4,1
α_n	3,2	24,5	11,5	–,7

11.

№	1	2	3	4
n	4	4	1	2
S_m	–135	125	56	–28,7

12.

№	1	2	3	4
α_1	110	–40	–53	310

13.

№	1	2	3	4
q	2	3	–7	–4
b_n	11,2	437,4	68,6	–307,2

14.

№	1	2	3	4
b_1	729	729	1024	1024
b_n	–27	$\frac{1}{3}$	2	4

15.

№	1	2
S_n	–1968,75	499,9936

№	3	4
S_n	909,0909	–416,6656

16.

№	1	2	3	4
b_1	2	–81	250	–21,6

17. 1) $-\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha$. **19.** Неверно. **20.** 1) $-2\sin\alpha$; 2) 0,5. **22.** 1) $ctg\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $-ctg2\alpha$; 3) $\cos^4\alpha$; 4) $tg^6\alpha$. **23.** Верно. **24.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4) $\cos 2\alpha$. **26.** 44. **27.** 45 справа. **28.** На 9 этаже. **30.** 9. **31.** 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25. **32.** 2 ученика. **33.** 52. **34.** 4 кг. **35.** 1) II компании, 288 000 тг. **42.** 1) 24; 2) 6. **43.** 74. **44.** 10. **45.** 1) 6; 2) 4; 3) 5. **46.** 180. **47.** 1) A_4^2; 2) C_{22}^3. **48.** 1) $32x^2$; 2) 24.

Содержание

Глава III.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА

Часть 2

Учебник для учащихся 10 класса
с нарушением зрения (слабовидящих)
специальных школ (классов)

Редактор С. Родионова
Художественный редактор А. Сланова
Технический редактор И. Тарапунец
Компьютерная верстка Г. Алимшеевой,
Э. Айткуловой

Адаптировано на укрупненный шрифт
ТОО «Центр САТР»: И. Н. Колмакова

Подписано в печать 00.00.2022
Уч. изд. л. 00,0. Усл. печ. л. 00,0.
Формат 70x100 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная

АЛГЕБРА 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МЕКТЕП